

## §14 中心極限定理と正規近似 演習問題 2

 問題の難易度の目安【基礎】★☆☆ 【標準】★★☆ 【発展】★★★

### 1 (★★☆)(Laplace-DeMoivre の定理の証明のための準備)

$X_1, \dots, X_n, \dots$  を互いに独立かつ同じ分布に従う確率変数で,  $p, q \geq 0, p + q = 1$  に対して

$$\begin{cases} \mathbb{P}[X_i = 1] = p \\ \mathbb{P}[X_i = 0] = q \end{cases}$$

をみたすとする. このとき期待値  $\mathbb{E}$  と分散  $\mathbb{V}$  について

$$\mathbb{E}[X_1 + \dots + X_n] = np,$$

$$\mathbb{V}[X_1 + \dots + X_n] = npq$$

となることを示せ.

### 2 (★★★)(Laplace-DeMoivre の定理)

$X_1, \dots, X_n, \dots$  を 1 の仮定をみたす確率変数とする.  $S_n := X_1 + \dots + X_n$  とおく. このとき, 任意の  $-\infty < a < b < \infty$  に対して

$$\lim_{n \rightarrow \infty} \mathbb{P} \left[ a \leq \frac{S_n - np}{\sqrt{npq}} \leq b \right] = \frac{1}{\sqrt{2\pi}} \int_a^b e^{-\frac{x^2}{2}} dx \quad \dots \textcircled{*}$$

が成り立つことを以下の手順に従って示せ.  $\textcircled{*}$  を ラプラス・ド・モアブル Laplace-DeMoivre の定理という.

(1)  $S_n$  は 2 項分布  $B(n, p)$  に従うことを確かめよ.

(2)  $\widehat{S}_n := \frac{S_n - np}{\sqrt{npq}}$  とおく. (1) より  $\widehat{S}_n$  は  $x_k = \frac{k - np}{\sqrt{npq}}$  ( $k = 0, 1, \dots, n$ ) に値を持つ確率  $p_{n,k} = \binom{n}{k} p^k q^{n-k}$  の確率変数であることがわかる. ここで  $\binom{n}{k} = \frac{n!}{k!(n-k)!}$  は 2 項係数を表す.  $n \rightarrow \infty$  のとき

$$k = np + x_k \sqrt{npq} \rightarrow \infty,$$

$$n - k = nq - x_k \sqrt{npq} \rightarrow \infty$$

であることを示せ.

(3) Stirling の公式

$$n! = e^{-n} n^n \sqrt{2\pi n} (1 + o(1))$$

を用いて,

$$p_{n,k} = \frac{1}{\sqrt{2\pi}} \sqrt{\frac{n}{k(n-k)}} \left(\frac{np}{k}\right)^k \left(\frac{nq}{n-k}\right)^{n-k} (1 + o(1)) \quad \dots \textcircled{a}$$

であることを示せ. ただし, 記号  $o(1)$  は  $n \rightarrow \infty$  のとき 0 に収束する項を表す.

(4)  $|x| \leq \frac{1}{2}$  に対する不等式

$$\left| \log(1+x) - x + \frac{x^2}{2} \right| \leq \frac{2}{3}|x|^3$$

を用いて,

$$\lim_{\substack{n \rightarrow \infty \\ x_k \rightarrow x}} \log \left( \left( \frac{np}{k} \right)^k \left( \frac{nq}{n-k} \right)^{n-k} \right) = -\frac{x^2}{2} \quad \dots \textcircled{b}$$

であることを示せ.

(5)  $h := \frac{1}{\sqrt{npq}}$  とおく. 等式

$$\sqrt{\frac{n}{k(n-k)}} = h(1 + o(1)) \quad \dots \textcircled{c}$$

を確かめ, 区間  $\left[ -\frac{np}{\sqrt{npq}}, \frac{nq}{\sqrt{npq}} \right]$  を  $n$  個に分割した小区間の長さが  $h$  であること, および  $x_k$  がその小区間の分点であることに着目し, 等式

$$\mathbb{P}[a \leq \widehat{S}_n \leq b] = \sum_{\substack{a \leq x_k \leq b \\ x_k = \frac{k-np}{\sqrt{npq}}}} p_{n,k}$$

から  $\textcircled{a}$  を導け.

### 3 (★★☆)(Laplace-DeMoivre の定理の応用)

$X$  が整数値のみをとる離散確率変数で,  $\tilde{X}$  を連続確率変数とする. 離散変数  $X$  の分布を連続変数  $\tilde{X}$  の分布で近似するとき,  $\mathbb{P}[a \leq X \leq b]$  を実際に計算するときは,  $\mathbb{P}\left[a - \frac{1}{2} \leq \tilde{X} \leq b + \frac{1}{2}\right]$  を計算する方が精度がよくなることが多い. これを**半数補正近似**という.

どの面も等確率に出るサイコロを 100 回独立に振るとき, 6 が出る回数を  $S_{100}$  とする. 確率  $\mathbb{P}[7 \leq S_{100} \leq 11]$  を半数補正近似と Laplace-DeMoivre の定理を用いて近似的に何 % か求めよ. ただし, 近似計算にあたり正規分布表を用いよ.