

確率分布の再生性 問題1 解答

ポアソン分布 $Po(\lambda)$ と正規分布 $N(\mu, \sigma^2)$ の再生性を使って確率を計算する:

- 確率変数 X, Y が互いに独立で, $X \sim Po(\lambda_1), Y \sim Po(\lambda_2)$ であるとき,
 $X + Y \sim Po(\lambda_1 + \lambda_2)$.
- 確率変数 X, Y が互いに独立で, $X \sim N(\mu_1, \sigma_1^2), Y \sim N(\mu_2, \sigma_2^2)$ であるとき,
 $aX + bY \sim N(a\mu_1 + b\mu_2, a^2\sigma_1^2 + b^2\sigma_2^2)$. ここで, a, b は定数で, $a \neq 0$ または $b \neq 0$.

1 確率変数 X, Y は互いに独立とする.

- (1) X はポアソン分布 $Po(2)$ に従い, Y はポアソン分布 $Po(3)$ に従うものとする. このとき確率 $P(X + Y \leq 3)$ を求めよ.

[解]: ポアソン分布の再生性より, 確率変数 $X + Y$ はポアソン分布 $Po(5)$ に従う. したがって求める確率は

$$P(X + Y \leq 3) = 0.265.$$

- (2) X はポアソン分布 $Po(2)$ に従い, Y はポアソン分布 $Po(4)$ に従うものとする. このとき確率 $P(X + Y \leq 8)$ を求めよ.

[解]: ポアソン分布の再生性より, 確率変数 $X + Y$ はポアソン分布 $Po(6)$ に従う. したがって求める確率は

$$P(X + Y \leq 8) = 0.847.$$

2 確率変数 X, Y は互いに独立とする.

- (1) X は正規分布 $N(4, 2^2)$ に従い, Y は正規分布 $N(4, 3^2)$ に従うものとする. このとき確率 $P(2X + Y < 15)$ を求めよ.

[解]: 正規分布の再生性より, 確率変数 $2X + Y$ は正規分布 $N(12, 25)$ に従う. したがって変数変換した確率変数

$$Z = \frac{2X + Y - 12}{5}$$

は標準正規分布 $N(0, 1)$ に従う. 以上より, 求める確率は

$$P(2X + Y < 15) = P\left(Z < \frac{3}{5}\right) = P(Z < 0.6) = 0.726.$$

- (2) X は正規分布 $N(40, 6^2)$ に従い, Y は正規分布 $N(40, 6^2)$ に従うものとする. このとき確率 $P(X + Y < 70)$ を求めよ.

[解]: 正規分布の再生性より, 確率変数 $X + Y$ は正規分布 $N(80, 72)$ に従う. したがって変数変換した確率変数

$$Z = \frac{X + Y - 80}{6\sqrt{2}}$$

は標準正規分布 $N(0, 1)$ に従う. 以上より, 求める確率は

$$P(X + Y < 70) = P\left(Z < \frac{-10}{6\sqrt{2}}\right) = P(Z < -1.18) = 0.119.$$

- (3) X は正規分布 $N(3, 2^2)$ に従い, Y は正規分布 $N(-3, 2^2)$ に従うものとする. このとき確率 $P(2X - Y < 0)$ を求めよ.

[解]: 正規分布の再生性より, 確率変数 $2X - Y$ は正規分布 $N(9, 20)$ に従う. したがって変数変換した確率変数

$$Z = \frac{2X - Y - 9}{2\sqrt{5}}$$

は標準正規分布 $N(0, 1)$ に従う. 以上より, 求める確率は

$$P(2X - Y < 0) = P\left(Z < \frac{-9}{2\sqrt{5}}\right) = P(Z < -2.01) = 0.0221.$$

- (4) X は正規分布 $N(40, 6^2)$ に従い, Y は正規分布 $N(40, 6^2)$ に従うものとする. このとき確率 $P(X + Y > 70)$ を求めよ.

[解]: 正規分布の再生性より, 確率変数 $X + Y$ は正規分布 $N(80, 72)$ に従う. したがって変数変換した確率変数

$$Z = \frac{X + Y - 80}{6\sqrt{2}}$$

は標準正規分布 $N(0, 1)$ に従う. 以上より, 求める確率は

$$P(X + Y > 70) = P\left(Z > \frac{-10}{6\sqrt{2}}\right) = P(Z > -1.18) = 0.881.$$

- (5) X は正規分布 $N(10, 4^2)$ に従い, Y は正規分布 $N(10, 5^2)$ に従うものとする. このとき確率 $P(3X - Y > 30)$ を求めよ.

[解]: 正規分布の再生性より, 確率変数 $3X - Y$ は正規分布 $N(20, 169)$ に従う. したがって変数変換した確率変数

$$Z = \frac{3X - Y - 20}{13}$$

は標準正規分布 $N(0, 1)$ に従う. 以上より, 求める確率は

$$P(3X - Y > 30) = P\left(Z > \frac{10}{13}\right) = P(Z > 0.769) = 0.221.$$

- (6) X は正規分布 $N(5, 6^2)$ に従い, Y は正規分布 $N(2, 1^2)$ に従うものとする. このとき確率 $P(X + 3Y > 10)$ を求めよ.

[解]: 正規分布の再生性より, 確率変数 $X + 3Y$ は正規分布 $N(11, 45)$ に従う. したがって変数変換した確率変数

$$Z = \frac{X + 3Y - 11}{3\sqrt{5}}$$

は標準正規分布 $N(0, 1)$ に従う. 以上より, 求める確率は

$$P(X + 3Y > 10) = P\left(Z > \frac{-1}{3\sqrt{5}}\right) = P(Z > -0.149) = 0.559.$$

- (7) X は正規分布 $N(10, 15^2)$ に従い, Y は正規分布 $N(10, 8^2)$ に従うものとする. このとき確率 $P(10 < X + Y < 30)$ を求めよ.

[解]: 正規分布の再生性より, 確率変数 $X + Y$ は正規分布 $N(20, 289)$ に従う. したがって変数変換した確率変数

$$Z = \frac{X + Y - 20}{17}$$

は標準正規分布 $N(0, 1)$ に従う. 以上より, 求める確率は

$$P(10 < X + Y < 30) = P\left(\frac{-10}{17} < Z < \frac{10}{17}\right) = P(-0.588 < Z < 0.588) = 0.444.$$

- (8) X は正規分布 $N(0, 4^2)$ に従い, Y は正規分布 $N(0, 2^2)$ に従うものとする. このとき確率 $P(-2 < 3X - 2Y < 10)$ を求めよ.

[解]: 正規分布の再生性より, 確率変数 $3X - 2Y$ は正規分布 $N(0, 160)$ に従う. したがって変数変換した確率変数

$$Z = \frac{3X - 2Y}{4\sqrt{10}}$$

は標準正規分布 $N(0, 1)$ に従う. 以上より, 求める確率は

$$P(-2 < 3X - 2Y < 10) = P\left(\frac{-2}{4\sqrt{10}} < Z < \frac{10}{4\sqrt{10}}\right) = P(-0.158 < Z < 0.791) = 0.348.$$

- (9) X は正規分布 $N(10, 2^2)$ に従い, Y は正規分布 $N(20, 5^2)$ に従うものとする. このとき確率 $P(20 < 5X - 2Y < 50)$ を求めよ.

[解]: 正規分布の再生性より, 確率変数 $5X - 2Y$ は正規分布 $N(10, 200)$ に従う. したがって変数変換した確率変数

$$Z = \frac{5X - 2Y - 10}{10\sqrt{2}}$$

は標準正規分布 $N(0, 1)$ に従う. 以上より, 求める確率は

$$P(20 < 5X - 2Y < 50) = P\left(\frac{10}{10\sqrt{2}} < Z < \frac{40}{10\sqrt{2}}\right) = P(0.707 < Z < 2.83) = 0.237.$$