

確率変数の独立, 共分散, 相関係数 問題1 解答

1 2つの離散確率変数 X, Y の確率分布が以下の表で与えられている.

	$Y = 1$	$Y = 2$	$Y = 3$
$X = 1$	0.12	0.2	0.08
$X = 2$	0.18	0.3	0.12

(1) X と Y の周辺確率分布を求めよ.

[解]: X の周辺確率分布は,

X の値	1	2
確率	0.4	0.6

Y の周辺確率分布は,

Y の値	1	2	3
確率	0.3	0.5	0.2

(2) X と Y の共分散 $\text{Cov}(X, Y)$ を求めよ.

[解]: 確率変数 X, Y, XY の期待値をそれぞれ求めると,

$$E(X) = 1 \times 0.4 + 2 \times 0.6 = 1.6,$$

$$E(Y) = 1 \times 0.3 + 2 \times 0.5 + 3 \times 0.2 = 1.9,$$

$$E(XY) = 1 \times 0.12 + 2 \times 0.2 + 3 \times 0.08 + 2 \times 0.18 + 4 \times 0.3 + 6 \times 0.12 = 3.04.$$

したがって, 共分散の値は

$$\text{Cov}(X, Y) = E(XY) - E(X)E(Y) = 3.04 - 1.6 \times 1.9 = 0.$$

(3) X と Y が独立か判定せよ.

[解]: 任意の $x = 1, 2$ および $y = 1, 2, 3$ に対して

$$P(X = x, Y = y) = P(X = x)P(Y = y)$$

が成り立つため, 定義から X, Y は独立.

2 2つの離散確率変数 X, Y の確率分布が以下の表で与えられている.

	$Y = -1$	$Y = 0$	$Y = 1$
$X = 1$	0.1	0.3	0.2
$X = 2$	0.1	0.2	0.1

(1) X と Y の周辺確率分布を求めよ.

[解]: X の周辺確率分布は,

X の値	1	2
確率	0.6	0.4

Y の周辺確率分布は,

Y の値	-1	0	1
確率	0.2	0.5	0.3

(2) X と Y の共分散 $\text{Cov}(X, Y)$ を求めよ.

[解]: 確率変数 X, Y, XY の期待値をそれぞれ求めると,

$$E(X) = 1 \times 0.6 + 2 \times 0.4 = 1.4,$$

$$E(Y) = (-1) \times 0.2 + 0 \times 0.5 + 1 \times 0.3 = 0.1,$$

$$E(XY) = (-1) \times 0.1 + 1 \times 0.2 + (-2) \times 0.1 + 2 \times 0.1 = 0.1.$$

したがって, 共分散の値は

$$\text{Cov}(X, Y) = E(XY) - E(X)E(Y) = 0.1 - 0.14 = -0.04.$$

(3) X と Y が独立か判定せよ.

[解]: $\text{Cov}(X, Y) = -0.04 \neq 0$ より, X と Y は独立ではない.

3 2つの離散確率変数 X, Y の確率分布が以下の表で与えられている.

	$Y = 0$	$Y = 1$	$Y = 2$
$X = 1$	0.1	0.1	0.1
$X = 2$	0.1	0.2	0.1
$X = 3$	0.1	0.1	0.1

(1) X と Y の周辺確率分布を求めよ.

[解]: X の周辺確率分布は,

X の値	1	2	3
確率	0.3	0.4	0.3

Y の周辺確率分布は,

Y の値	0	1	2
確率	0.3	0.4	0.3

(2) X と Y の共分散 $\text{Cov}(X, Y)$ を求めよ.

[解]: 確率変数 X, Y, XY の期待値をそれぞれ求めると,

$$E(X) = 1 \times 0.3 + 2 \times 0.4 + 3 \times 0.3 = 2,$$

$$E(Y) = 0 \times 0.3 + 1 \times 0.4 + 2 \times 0.3 = 1,$$

$$E(XY) = 1 \times 0.1 + 2 \times 0.1 + 2 \times 0.2 + 4 \times 0.1 + 3 \times 0.1 + 6 \times 0.1 = 2.$$

したがって, 共分散の値は

$$\text{Cov}(X, Y) = E(XY) - E(X)E(Y) = 2 - 2 = 0.$$

(3) X と Y が独立か判定せよ.

[解]: $X = 1$ と $Y = 0$ に注目すると,

$$P(X = 1, Y = 0) = 0.1, \quad P(X = 1)P(Y = 0) = 0.3 \times 0.3 = 0.09$$

より, $P(X = 1, Y = 0) \neq P(X = 1)P(Y = 0)$ となるため X と Y は独立ではない.

- 4 2つの離散確率変数 X, Y の確率分布が以下の表で与えられている.

	$Y = 1$	$Y = 10$	$Y = 100$
$X = 1$	a	a	a
$X = 2$	0	a	a
$X = 3$	a	a	a

- (1) 表中の実数 a を求めよ.

[解]: 確率分布から $8a = 1$ である. したがって, $a = 0.125$.

- (2) X と Y の周辺確率分布を求めよ.

[解]: X の周辺確率分布は,

X の値	1	2	3
確率	0.375	0.25	0.375

Y の周辺確率分布は,

Y の値	1	10	100
確率	0.25	0.375	0.375

- (3) X と Y の共分散 $\text{Cov}(X, Y)$ を求めよ.

[解]: 確率変数 X, Y, XY の期待値をそれぞれ求めると,

$$E(X) = 1 \times 0.375 + 2 \times 0.25 + 3 \times 0.375 = 2,$$

$$E(Y) = 1 \times 0.25 + 10 \times 0.375 + 100 \times 0.375 = 41.5,$$

$$E(XY) = (1 + 10 + 100 + 20 + 200 + 3 + 30 + 300) \times 0.125 = 83.$$

したがって, 共分散の値は $\text{Cov}(X, Y) = E(XY) - E(X)E(Y) = 83 - 83 = 0$.

- (4) X と Y が独立か判定せよ.

[解]: $X = 2$ と $Y = 1$ に注目すると,

$$P(X = 2, Y = 1) = 0, \quad P(X = 2)P(Y = 1) = 0.25 \times 0.25 = 0.0625$$

より, $P(X = 2, Y = 1) \neq P(X = 2)P(Y = 1)$ となるため X と Y は独立ではない.