多次元確率分布　問題2　解答

$\boxed{1}$ 連続確率変数 X, Y の確率密度関数が

$$f(x, y) = axy \quad (0 < x < 1,\ 0 < y < 1)$$

で与えられている.

(1) 実数 a の値を求めよ.

[解]: 確率密度関数の性質から,

$$1 = \int_0^1 \int_0^1 axy \, \mathrm{d}x \, \mathrm{d}y = \frac{a}{4}.$$

したがって, $a = 4$.

(2) X, Y の周辺確率密度関数 $f_X(x), f_Y(y)$ をそれぞれ求めよ.

[解]: 周辺確率密度関数の定義より,

$$f_X(x) = \int_0^1 4xy \, \mathrm{d}y = 2x,$$
$$f_Y(y) = \int_0^1 4xy \, \mathrm{d}x = 2y.$$

(3) 確率 $P\left(0 < X < \dfrac{1}{2},\ 0 < Y < \dfrac{1}{2}\right)$ の値を求めよ.

[解]: 確率は 2 重積分によって求められるため,

$$P\left(0 < X < \frac{1}{2},\ 0 < Y < \frac{1}{2}\right) = \int_0^{\frac{1}{2}} \int_0^{\frac{1}{2}} 4xy \, \mathrm{d}x \, \mathrm{d}y = \int_0^{\frac{1}{2}} \frac{y}{2} \, \mathrm{d}y = \frac{1}{16}.$$

(4) 確率 $P\left(\dfrac{1}{2} < X < 1,\ \dfrac{1}{2} < Y < 1\right)$ の値を求めよ.

[解]: 確率は 2 重積分によって求められるため,

$$P\left(\frac{1}{2} < X < 1,\ \frac{1}{2} < Y < 1\right) = \int_{\frac{1}{2}}^1 \int_{\frac{1}{2}}^1 4xy \, \mathrm{d}x \, \mathrm{d}y = \int_{\frac{1}{2}}^1 \frac{3y}{2} \, \mathrm{d}y = \frac{9}{16}.$$

$\boxed{2}$ 連続確率変数 X, Y の確率密度関数が

$$f(x, y) = a\,(x + y) \quad (0 < x < 2,\ 0 < y < 2)$$

で与えられている.

(1) 実数 a の値を求めよ.

[解]: 確率密度関数の性質から,

$$1 = \int_0^2 \int_0^2 a\,(x + y) \, \mathrm{d}x \, \mathrm{d}y = 8a.$$

したがって, $a = \dfrac{1}{8}$.

(2) X, Y の周辺確率密度関数 $f_X(x), f_Y(y)$ をそれぞれ求めよ.

[解]: 周辺確率密度関数の定義から,

$$f_X(x) = \int_0^2 \left(\frac{x}{8} + \frac{y}{8}\right) \mathrm{d}y = \frac{x}{4} + \frac{1}{4},$$
$$f_Y(y) = \int_0^2 \left(\frac{x}{8} + \frac{y}{8}\right) \mathrm{d}x = \frac{y}{4} + \frac{1}{4}.$$

(3) 確率 $P\left(0 < X < \frac{1}{2},\ 0 < Y < \frac{1}{2}\right)$ の値を求めよ.

[解]: 確率は2重積分によって求められるため,

$$P\left(0 < X < \frac{1}{2},\ 0 < Y < \frac{1}{2}\right) = \int_0^{\frac{1}{2}} \int_0^{\frac{1}{2}} \left(\frac{x}{8} + \frac{y}{8}\right) \mathrm{d}x\,\mathrm{d}y = \int_0^{\frac{1}{2}} \left(\frac{y}{16} + \frac{1}{64}\right) \mathrm{d}y = \frac{1}{64}.$$

(4) 確率 $P\left(\frac{1}{2} < X < \frac{3}{2},\ 1 < Y < 2\right)$ の値を求めよ.

[解]: 確率は2重積分によって求められるため,

$$P\left(\frac{1}{2} < X < \frac{3}{2},\ 1 < Y < 2\right) = \int_1^2 \int_{\frac{1}{2}}^{\frac{3}{2}} \left(\frac{x}{8} + \frac{y}{8}\right) \mathrm{d}x\,\mathrm{d}y = \int_1^2 \left(\frac{y}{8} + \frac{1}{8}\right) \mathrm{d}y = \frac{5}{16}.$$

$\boxed{3}$ 連続確率変数 X, Y の確率密度関数が

$$f(x, y) = a\left(-x^2 - y^2 + 2\right) \quad (-1 < x < 1,\ -1 < y < 1)$$

で与えられている.

(1) 実数 a の値を求めよ.

[解]: 確率密度関数の性質から,

$$1 = \int_{-1}^1 \int_{-1}^1 a\left(-x^2 - y^2 + 2\right) \mathrm{d}x\,\mathrm{d}y = \frac{16a}{3}.$$

したがって, $a = \frac{3}{16}$.

(2) X, Y の周辺確率密度関数 $f_X(x), f_Y(y)$ をそれぞれ求めよ.

[解]: 周辺確率密度関数の定義より,

$$f_X(x) = \int_{-1}^1 \left(-\frac{3x^2}{16} - \frac{3y^2}{16} + \frac{3}{8}\right) \mathrm{d}y = \frac{5}{8} - \frac{3x^2}{8},$$
$$f_Y(y) = \int_{-1}^1 \left(-\frac{3x^2}{16} - \frac{3y^2}{16} + \frac{3}{8}\right) \mathrm{d}x = \frac{5}{8} - \frac{3y^2}{8}.$$

(3) 確率 $P(0 < X < 1,\ 0 < Y < 1)$ の値を求めよ.

[解]: 確率は2重積分によって求められるため,

$$\begin{aligned} P(0 < X < 1,\ 0 < Y < 1) &= \int_0^1 \int_0^1 \left(-\frac{3x^2}{16} - \frac{3y^2}{16} + \frac{3}{8}\right) \mathrm{d}x\,\mathrm{d}y \\ &= \int_0^1 \left(\frac{5}{16} - \frac{3y^2}{16}\right) \mathrm{d}y = \frac{1}{4}. \end{aligned}$$

(4) 確率 $P\left(-1 < X < 0,\ -\dfrac{1}{2} < Y < 1\right)$ の値を求めよ.

[解]: 確率は 2 重積分によって求められるため,

$$\begin{aligned} P\left(-1 < X < 0,\ -\frac{1}{2} < Y < 1\right) &= \int_{-\frac{1}{2}}^{1}\int_{-1}^{0}\left(-\frac{3x^2}{16} - \frac{3y^2}{16} + \frac{3}{8}\right)\mathrm{d}x\,\mathrm{d}y \\ &= \int_{-\frac{1}{2}}^{1}\left(\frac{5}{16} - \frac{3y^2}{16}\right)\mathrm{d}y = \frac{51}{128}. \end{aligned}$$