固有値の定義　解答

$\boxed{\mathbf{1}}$　正方行列 A に対し，スカラー λ と $\vec{0}$ とは異なるベクトル $\vec{v}$ が存在して，

$$A\vec{v} = \lambda\vec{v}$$

が成り立つとき，λ を A の固有値という。（なおこのとき $\vec{v}$ を A の λ に対する（属する）固有ベクトルという。）

$\boxed{\mathbf{2}}$　固有値 λ_i に対する A の固有ベクトルを $\vec{v_i}$ とすると

$$A\vec{v_i} = \lambda_i\vec{v_i}$$

が成り立つ。この両辺を α 倍すれば，

$$(\alpha A)\vec{v_i} = (\alpha\lambda_i)\vec{v_i}$$

となるので，$\alpha\lambda_i$ は αA の固有値となる。したがって αA の固有値は

$$\alpha\lambda_1, \alpha\lambda_2, \ldots, \alpha\lambda_n$$

である。

$\boxed{\mathbf{3}}$　前問の記号をそのまま使うと，

$$(A + \alpha I_n)\vec{v_i} = A\vec{v_i} + \alpha\vec{v_i} = \lambda\vec{v_i} + \alpha\vec{v_i} = (\lambda_i + \alpha)\vec{v_i}$$

を得るので，$\lambda_i + \alpha$ は $A + \alpha I_n$ の固有値となる。したがって $A + \alpha I_n$ の固有値は

$$\lambda_1 + \alpha, \lambda_2 + \alpha, \ldots, \lambda_n + \alpha$$

である。である。

$\boxed{\mathbf{4}}$　正方行列 A が固有値 0 を持ったとする。対応する固有ベクトルを $\vec{v}$ とおくと，

$$A\vec{v} = 0\vec{v} = \vec{0}$$

これは A の列の全体が 1 次従属であることを表している。したがって A の行列式は 0 となり，正則行列とはならない。

　以上で証明は完了しているが，より丁寧にいうと，A を列ベクトルを並べたものとして

$$A = (\vec{a}_1, \vec{a}_2, \ldots, \vec{a}_n)$$

と表し，

$$\vec{v} = \begin{pmatrix} v_1 \\ v_2 \\ \vdots \\ v_n \end{pmatrix}$$

とおくと，$A\vec{v}=\vec{0}$ は

$$v_1\vec{a}_1+v_2\vec{a}_2+\cdots+v_n\vec{a}_n=\vec{0}$$

ということで，固有ベクトルは $\vec{0}$ とは異なるので $(v_1,v_2,\ldots,v_n)\neq(0,0,\ldots,0)$ だから，この関係式は $\vec{a}_1,\vec{a}_2,\ldots,\vec{a}_n$ が 1 次従属であることを表している。1 次従属な列からなるので，A の行列式は 0 であり，正則行列ではない。以上の対偶を取ると，正則行列であれば固有値 0 を持たない。

$\boxed{\mathbf{5}}$　λ を A の固有値，$\vec{u}$ を対応する固有ベクトルとする。このとき

$$A\vec{u}=\lambda\vec{u}$$

が成り立つ。$\vec{u}$ に n 個の 0 を追加して

$$\vec{U}=\begin{pmatrix}\vec{u}\\0\\\vdots\\0\end{pmatrix}=\begin{pmatrix}\vec{u}\\\vec{0}\end{pmatrix}$$

という $(m+n)$ 次元ベクトル $\vec{U}$ を定義すると，

$$C\vec{U}=\begin{pmatrix}A\vec{u}\\B\vec{0}\end{pmatrix}=\begin{pmatrix}\lambda\vec{u}\\\vec{0}\end{pmatrix}=\lambda\begin{pmatrix}\vec{u}\\\vec{0}\end{pmatrix}=\lambda\vec{U}$$

が得られる。$\vec{u}\neq\vec{0}$ だから $\vec{U}$ も $\vec{0}$ にならないため，λ は C の固有値である。

同様に，μ を B の固有値，$\vec{v}$ を対応する固有ベクトルとし，$\vec{v}$ に m 個の 0 を追加して

$$\vec{V}=\begin{pmatrix}0\\\vdots\\0\\\vec{v}\end{pmatrix}=\begin{pmatrix}\vec{0}\\\vec{v}\end{pmatrix}$$

という $(m+n)$ 次元ベクトル $\vec{V}$ を定義すると，

$$C\vec{V}=\mu\vec{V}$$

が成り立ち，$\vec{V}\neq\vec{0}$ であるので μ は C の固有値である。

$\boxed{\mathbf{6}}$　設定より

$$A\vec{u}=\lambda\vec{u},\ A\vec{v}=\mu\vec{v}$$

が成り立ち，かつ $\vec{v}\neq\vec{0},\vec{u}\neq\vec{0}$ である。c_1,c_2 をスカラーとし，

$$c_1\vec{u}+c_2\vec{v}=\vec{0} \tag{1}$$

という関係式を考える。この両辺に左から A を掛けると，

$$A(c_1\vec{u}+c_2\vec{v})=A\vec{0}$$
$$c_1A\vec{u}+c_2A\vec{v}=\vec{0}$$
$$c_1\lambda\vec{u}+c_2\mu\vec{v}=\vec{0}$$

(1) の両辺にスカラー λ を掛けたものから最後に得られた式を差し引くと，

$$c_2(\lambda - \mu)\vec{v} = \vec{0}$$

を得る。仮定より $\lambda - \mu \neq 0$ で $\vec{v} \neq \vec{0}$ だから，これより $c_2 = 0$ を得る。これを (1) に戻すと，$\vec{u} \neq \vec{0}$ より $c_1 = 0$ も得られる。したがって $\vec{u}, \vec{v}$ は 1 次独立である。