正規直交化法　問題 2

$\boxed{1}$ 以下の部分空間 W に対し, ベクトル $\boldsymbol{x}$ の正射影 $\boldsymbol{p}$ を求めよ. ここで内積は標準内積とする.

(1) $W = \left\langle \begin{pmatrix} 1 \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} 1 \\ 1 \\ 1 \end{pmatrix} \right\rangle, \qquad \boldsymbol{x} = \begin{pmatrix} 1 \\ 0 \\ -1 \end{pmatrix}.$

(2) $W = \left\langle \begin{pmatrix} 1 \\ 1 \\ 0 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} 0 \\ 1 \\ 1 \end{pmatrix} \right\rangle, \qquad \boldsymbol{x} = \begin{pmatrix} 3 \\ 2 \\ 1 \end{pmatrix}.$

(3) $W = \left\langle \begin{pmatrix} -1 \\ 1 \\ 1 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} 1 \\ -1 \\ 0 \end{pmatrix} \right\rangle, \qquad \boldsymbol{x} = \begin{pmatrix} 1 \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix}.$

(4) $W = \left\langle \begin{pmatrix} 2 \\ -1 \\ 2 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} 1 \\ 2 \\ -2 \end{pmatrix} \right\rangle, \qquad \boldsymbol{x} = \begin{pmatrix} 1 \\ -1 \\ 1 \end{pmatrix}.$

$\boxed{2}$ 標準内積 n 次元ベクトル空間 $\mathbb{R}^n$ の r 次元部分空間を V, s 次元部分空間を W とする. W の基底を成す列ベクトルを $\boldsymbol{a}_1, \boldsymbol{a}_2, \ldots, \boldsymbol{a}_s$ とし, $n \times s$ 行列 A を $A = (\boldsymbol{a}_1\ \boldsymbol{a}_2\ \cdots\ \boldsymbol{a}_s)$ とおく.

(1) ${}^tAA$ は正則行列であることを示せ.

(2) V のベクトルを W へ正射影したベクトルへ写す写像を p_{VW} とする. このとき任意の $\boldsymbol{b} \in V$ に対し

$$p_{VW}(\boldsymbol{b}) = (A\ ({}^tAA)^{-1}\ {}^tA)\boldsymbol{b}$$

が成り立つことを示せ.

(特に p_{VW} は V から W への線形写像となる.)