ベクトルの内積，正規直交系　演習問題３

$\mathbb{R}^n$ に内積 $(\cdot,\cdot)$ が与えられているとする．

- $\boldsymbol{a}_1, \boldsymbol{a}_2, \cdots, \boldsymbol{a}_r \in \mathbb{R}^n$ に対して，これらの中の相異なるどの 2 つのベクトルも互いに直交する，すなわち
$$i \neq j \quad \Rightarrow \quad (\boldsymbol{a}_i, \boldsymbol{a}_j) = 0$$
が成り立つとき，$\{\boldsymbol{a}_1, \boldsymbol{a}_2, \cdots, \boldsymbol{a}_r\}$ は**直交系**であるという．また，ノルムが 1 のベクトルからなる直交系，すなわちすべての $i\,(1 \leq i \leq r)$ に対して $\|\boldsymbol{a}_i\| = 1$ となる直交系を**正規直交系**という．

問 1． $\{\boldsymbol{a}_1, \boldsymbol{a}_2\}$ は 1 次独立であるとする．以下の問に答えよ．

(i) $\boldsymbol{a}_1 \neq \boldsymbol{o}$ かつ $\boldsymbol{a}_2 \neq \boldsymbol{o}$ を示せ．

(ii)
$$\boldsymbol{b}_1 = \boldsymbol{a}_1, \quad \boldsymbol{b}_2 = \boldsymbol{a}_2 - k_1 \boldsymbol{b}_1$$
$(k_1 \in \mathbb{R})$ とおく．$\boldsymbol{b}_2 \neq \boldsymbol{o}$ であることを示し，さらに $(\boldsymbol{b}_1, \boldsymbol{b}_2) = 0$ となるような $k_1 \in \mathbb{R}$ を求めよ．

(iii) $\boldsymbol{b}_1$と $\boldsymbol{b}_2$，k_1 はそれぞれ (ii) で定められたベクトルと求めた実数とする．このとき $\langle \boldsymbol{a}_1, \boldsymbol{a}_2 \rangle = \langle \boldsymbol{b}_1, \boldsymbol{b}_2 \rangle$ が成り立つことを示せ．

問 2． $\{\boldsymbol{a}_1, \boldsymbol{a}_2, \cdots, \boldsymbol{a}_r\}$ は 1 次独立であるとする．以下の問に答えよ．

(i) すべての $1 \leq s \leq r$ について，$\boldsymbol{a}_s \neq \boldsymbol{o}$ を示せ．

(ii) いま，あるベクトルの組 $\{\boldsymbol{b}_1, \boldsymbol{b}_2, \cdots, \boldsymbol{b}_{s-1}\}$ $(3 \leq s \leq r)$ が存在して
  - · $\{\boldsymbol{b}_1, \boldsymbol{b}_2, \cdots, \boldsymbol{b}_{s-1}\}$ は直交系で属すどのベクトルも零ベクトルではない．
  - · $\langle \boldsymbol{a}_1, \boldsymbol{a}_2, \cdots, \boldsymbol{a}_{s-1} \rangle = \langle \boldsymbol{b}_1, \boldsymbol{b}_2, \cdots, \boldsymbol{b}_{s-1} \rangle$

をみたすとする．さらに
$$\boldsymbol{b}_s = \boldsymbol{a}_s - \sum_{t=1}^{s-1} k_t \boldsymbol{b}_t$$
とおく．このとき $\boldsymbol{b}_s \neq \boldsymbol{o}$ となることを示せ．さらに $\{\boldsymbol{b}_1, \boldsymbol{b}_2, \cdots, \boldsymbol{b}_s\}$ が直交系となるような $k_t\,(1 \leq t \leq s-1)$ を求めよ．

(iii) $\boldsymbol{b}_s$ と $k_t\,(1 \leq t \leq s-1)$ はそれぞれ (ii) において定められたベクトルと求めた実数とする．$\langle \boldsymbol{a}_1, \boldsymbol{a}_2, \cdots, \boldsymbol{a}_s \rangle = \langle \boldsymbol{b}_1, \boldsymbol{b}_2, \cdots, \boldsymbol{b}_s \rangle$ となることを示せ．