ベクトルの内積，正規直交系　演習問題２

$\mathbb{R}^n$ に内積 $(\cdot,\cdot)$ が与えられているとする．

- $\boldsymbol{a}_1, \boldsymbol{a}_2, \cdots, \boldsymbol{a}_r \in \mathbb{R}^n$ に対して，これらの中の相異なるどの 2 つのベクトルも互いに直交する，すなわち
$$i \neq j \quad \Rightarrow \quad (\boldsymbol{a}_i, \boldsymbol{a}_j) = 0$$
が成り立つとき，$\{\boldsymbol{a}_1, \boldsymbol{a}_2, \cdots, \boldsymbol{a}_r\}$ は**直交系**であるという．また，ノルムが 1 のベクトルからなる直交系，すなわちすべての $i\,(1 \leq i \leq r)$ に対して $\|\boldsymbol{a}_i\| = 1$ となる直交系を**正規直交系**という．

問 1. $\{\boldsymbol{a}_1, \boldsymbol{a}_2, \cdots, \boldsymbol{a}_r\}$ が正規直交系であることの必要十分条件は,

$$(\boldsymbol{a}_i, \boldsymbol{a}_j) = \begin{cases} 1 & (i = j) \\ 0 & (i \neq j) \end{cases}$$

であることを示せ.

問 2. $\{\boldsymbol{a}_1, \boldsymbol{a}_2, \cdots, \boldsymbol{a}_r\}$ は直交系で，属すどのベクトルも零ベクトルではないとする．このとき，$\{\boldsymbol{a}_1, \boldsymbol{a}_2, \cdots, \boldsymbol{a}_r\}$ は 1 次独立となることを示せ.

問 3. $\{\boldsymbol{b}_1, \boldsymbol{b}_2, \cdots, \boldsymbol{b}_r\}$ は直交系で，属すどのベクトルも零ベクトルではないとする．このとき，

$$\boldsymbol{c}_i = \frac{1}{\|\boldsymbol{b}_i\|}\boldsymbol{b}_i \quad (i = 1, 2, \cdots, r)$$

とすれば，$\{\boldsymbol{c}_1, \boldsymbol{c}_2, \cdots, \boldsymbol{c}_r\}$ は正規直交系で，さらに $\langle \boldsymbol{b}_1, \boldsymbol{b}_2, \cdots, \boldsymbol{b}_r \rangle = \langle \boldsymbol{c}_1, \boldsymbol{c}_2, \cdots, \boldsymbol{c}_r \rangle$ となることを示せ.