ベクトルの内積，正規直交系　演習問題３　解答

$\mathbb{R}^n$ に内積 $(\cdot,\cdot)$ が与えられているとする．

- $\boldsymbol{a}_1, \boldsymbol{a}_2, \cdots, \boldsymbol{a}_r \in \mathbb{R}^n$ に対して，これらの中の相異なるどの 2 つのベクトルも互いに直交する，すなわち
$$i \neq j \quad \Rightarrow \quad (\boldsymbol{a}_i, \boldsymbol{a}_j) = 0$$
が成り立つとき，$\{\boldsymbol{a}_1, \boldsymbol{a}_2, \cdots, \boldsymbol{a}_r\}$ は**直交系**であるという．また，ノルムが 1 のベクトルからなる直交系，すなわちすべての $i\,(1 \leq i \leq r)$ に対して $\|\boldsymbol{a}_i\| = 1$ となる直交系を**正規直交系**という．

問 1. $\{\boldsymbol{a}_1, \boldsymbol{a}_2\}$ は 1 次独立であるとする．以下の問に答えよ．

(i) $\boldsymbol{a}_1 \neq \boldsymbol{o}$ かつ $\boldsymbol{a}_2 \neq \boldsymbol{o}$ を示せ．

解答． $\boldsymbol{a}_1 = \boldsymbol{o}$ と仮定すると，非自明な 1 次関係式 $1\boldsymbol{a}_1 + 0\boldsymbol{a}_2 = \boldsymbol{o}$ が成立するので $\{\boldsymbol{a}_1, \boldsymbol{a}_2\}$ は 1 次従属となり矛盾する．$\boldsymbol{a}_2 = \boldsymbol{o}$ の場合も同様である．よって $\boldsymbol{a}_1 \neq \boldsymbol{o}$ かつ $\boldsymbol{a}_2 \neq \boldsymbol{o}$ が成り立つ． ■

(ii)
$$\boldsymbol{b}_1 = \boldsymbol{a}_1, \quad \boldsymbol{b}_2 = \boldsymbol{a}_2 - k_1\boldsymbol{b}_1$$
$(k_1 \in \mathbb{R})$ とおく．$\boldsymbol{b}_2 \neq \boldsymbol{o}$ であることを示し，さらに $(\boldsymbol{b}_1, \boldsymbol{b}_2) = 0$ となるような $k_1 \in \mathbb{R}$ を求めよ．

解答． $\boldsymbol{b}_2 = \boldsymbol{o}$ のとき，$\boldsymbol{a}_2 = k_1\boldsymbol{b}_1 = k_1\boldsymbol{a}_1$ となり，$\boldsymbol{a}_2$ は $\boldsymbol{a}_1$ の 1 次結合で表わせたことになるが，これは $\{\boldsymbol{a}_1, \boldsymbol{a}_2\}$ が 1 次独立であることに矛盾する．よって $\boldsymbol{b}_2 \neq \boldsymbol{o}$ とわかる．
次に $(\boldsymbol{b}_1, \boldsymbol{b}_2) = 0$ となるような $k_1 \in \mathbb{R}$ を求める．
$$(\boldsymbol{b}_1, \boldsymbol{b}_2) = (\boldsymbol{b}_1, \boldsymbol{a}_2 - k_1\boldsymbol{b}_1) = (\boldsymbol{b}_1, \boldsymbol{a}_2) - k_1(\boldsymbol{b}_1, \boldsymbol{b}_1)$$
であることと $\boldsymbol{b}_1 \neq \boldsymbol{o}$ より $(\boldsymbol{b}_1, \boldsymbol{b}_1) \neq 0$ であることに注意すれば，$(\boldsymbol{b}_1, \boldsymbol{b}_2) = 0$ となる必要十分条件は
$$k_1 = \frac{(\boldsymbol{b}_1, \boldsymbol{a}_1)}{(\boldsymbol{b}_1, \boldsymbol{b}_1)} \left(= \frac{(\boldsymbol{a}_1, \boldsymbol{b}_1)}{(\boldsymbol{b}_1, \boldsymbol{b}_1)} \right)$$
だとわかる． ■

(iii) $\boldsymbol{b}_1$と $\boldsymbol{b}_2$，k_1 はそれぞれ (ii) で定められたベクトルと求めた実数とする．このとき $\langle \boldsymbol{a}_1, \boldsymbol{a}_2 \rangle = \langle \boldsymbol{b}_1, \boldsymbol{b}_2 \rangle$ が成り立つことを示せ．

解答． $\boldsymbol{a}_1 = \boldsymbol{b}_1 \in \langle \boldsymbol{b}_1, \boldsymbol{b}_2 \rangle$，$\boldsymbol{a}_2 = k_1\boldsymbol{b}_1 + \boldsymbol{b}_2 \in \langle \boldsymbol{b}_1, \boldsymbol{b}_2 \rangle$ であり，$\langle \boldsymbol{b}_1, \boldsymbol{b}_2 \rangle$ は $\mathbb{R}^n$ の部分空間であることから $\boldsymbol{a}_1, \boldsymbol{a}_2$ の 1 次結合で表されるベクトルはすべて $\langle \boldsymbol{b}_1, \boldsymbol{b}_2 \rangle$ に属すことがわかる．よって $\langle \boldsymbol{a}_1, \boldsymbol{a}_2 \rangle \subset \langle \boldsymbol{b}_1, \boldsymbol{b}_2 \rangle$．同様にして $\boldsymbol{b}_1 = \boldsymbol{a}_1 \in \langle \boldsymbol{a}_1, \boldsymbol{a}_2 \rangle$, $\boldsymbol{b}_2 = \boldsymbol{a}_2 - k_1\boldsymbol{b}_1 = \boldsymbol{a}_2 - k_1\boldsymbol{a}_1 \in \langle \boldsymbol{a}_1, \boldsymbol{a}_2 \rangle$ であることと $\langle \boldsymbol{a}_1, \boldsymbol{a}_2 \rangle$ が部分空間であることから $\langle \boldsymbol{a}_1, \boldsymbol{a}_2 \rangle \supset \langle \boldsymbol{b}_1, \boldsymbol{b}_2 \rangle$ とわかる．したがって $\langle \boldsymbol{a}_1, \boldsymbol{a}_2 \rangle = \langle \boldsymbol{b}_1, \boldsymbol{b}_2 \rangle$ を得る． ■

問 2. $\{\boldsymbol{a}_1, \boldsymbol{a}_2, \cdots, \boldsymbol{a}_r\}$ は 1 次独立であるとする．以下の問に答えよ．

(i) すべての $1 \leq s \leq r$ について，$\boldsymbol{a}_s \neq \boldsymbol{o}$ を示せ．

解答． $\boldsymbol{a}_1 = \boldsymbol{o}$ と仮定すると，非自明な 1 次関係式

$$1\boldsymbol{a}_1 + 0\boldsymbol{a}_2 + 0\boldsymbol{a}_3 + \cdots + 0\boldsymbol{a}_r = \boldsymbol{o}$$

が成立するので，$\{\boldsymbol{a}_1, \boldsymbol{a}_2, \cdots, \boldsymbol{a}_r\}$ が 1 次独立になることに矛盾する．ある $2 \leq s \leq r$ に対して $\boldsymbol{a}_s = \boldsymbol{o}$ であった場合も同様である．よってすべての $1 \leq s \leq r$ について，$\boldsymbol{a}_s \neq \boldsymbol{o}$． ■

(ii) いま，あるベクトルの組 $\{\boldsymbol{b}_1, \boldsymbol{b}_2, \cdots, \boldsymbol{b}_{s-1}\}$ $(3 \leq s \leq r)$ が存在して

- $\{\boldsymbol{b}_1, \boldsymbol{b}_2, \cdots, \boldsymbol{b}_{s-1}\}$ は直交系で属すどのベクトルも零ベクトルではない．
- $\langle \boldsymbol{a}_1, \boldsymbol{a}_2, \cdots, \boldsymbol{a}_{s-1}\rangle = \langle \boldsymbol{b}_1, \boldsymbol{b}_2, \cdots, \boldsymbol{b}_{s-1}\rangle$

をみたすとする．さらに

$$\boldsymbol{b}_s = \boldsymbol{a}_s - \sum_{t=1}^{s-1} k_t \boldsymbol{b}_t$$

とおく．このとき $\boldsymbol{b}_s \neq \boldsymbol{o}$ となることを示せ．さらに $\{\boldsymbol{b}_1, \boldsymbol{b}_2, \cdots, \boldsymbol{b}_s\}$ が直交系となるような $k_t\,(1 \leq t \leq s-1)$ を求めよ．

解答． $\boldsymbol{b}_s = \boldsymbol{o}$ とすると，

$$\boldsymbol{a}_s = \sum_{t=1}^{s-1} k_t \boldsymbol{b}_t \in \langle \boldsymbol{b}_1, \boldsymbol{b}_2, \cdots, \boldsymbol{b}_{s-1}\rangle = \langle \boldsymbol{a}_1, \boldsymbol{a}_2, \cdots, \boldsymbol{a}_{s-1}\rangle,$$

すなわち $\boldsymbol{a}_s$ は $\boldsymbol{a}_1, \boldsymbol{a}_2, \cdots, \boldsymbol{a}_{s-1}$ の 1 次結合で表せることになるが，これは $\{\boldsymbol{a}_1, \boldsymbol{a}_2, \cdots, \boldsymbol{a}_r\}$ が 1 次独立であることに矛盾する．よって $\boldsymbol{b}_s \neq \boldsymbol{o}$ である．
次に $\{\boldsymbol{b}_1, \boldsymbol{b}_2, \cdots, \boldsymbol{b}_s\}$ が直交系となるような $k_t\,(1 \leq t \leq s-1)$ を求める．$\{\boldsymbol{b}_1, \boldsymbol{b}_2, \cdots, \boldsymbol{b}_{s-1}\}$ が直交系であるから，どんな $1 \leq t \leq s-1$ についても $(\boldsymbol{b}_s, \boldsymbol{b}_t) = 0$ となるような $k_t\,(1 \leq t \leq s-1)$ を求めればよい．再び $\{\boldsymbol{b}_1, \boldsymbol{b}_2, \cdots, \boldsymbol{b}_{s-1}\}$ は直交系であるから，どんな $1 \leq t \leq s-1$ についても

$$(\boldsymbol{b}_s, \boldsymbol{b}_t) = \left(\boldsymbol{a}_s - \sum_{u=1}^{s-1} k_u \boldsymbol{b}_u, \boldsymbol{b}_t\right) = (\boldsymbol{a}_s, \boldsymbol{b}_t) - \sum_{u=1}^{s-1} k_u (\boldsymbol{b}_u, \boldsymbol{b}_t) = (\boldsymbol{a}_s, \boldsymbol{b}_t) - k_t (\boldsymbol{b}_t, \boldsymbol{b}_t)$$

が成り立つ．$(\boldsymbol{b}_t, \boldsymbol{b}_t) \neq 0$ に注意すれば，$\{\boldsymbol{b}_1, \boldsymbol{b}_2, \cdots, \boldsymbol{b}_s\}$ が直交系となるような $k_t\,(1 \leq t \leq s-1)$ は

$$k_t = \frac{(\boldsymbol{a}_s, \boldsymbol{b}_t)}{(\boldsymbol{b}_t, \boldsymbol{b}_t)} \quad (1 \leq t \leq s-1)$$

とわかる． ■

(iii) $\boldsymbol{b}_s$ と $k_t\,(1 \leq t \leq s-1)$ はそれぞれ (ii) において定められたベクトルと求めた実数とする．$\langle \boldsymbol{a}_1, \boldsymbol{a}_2, \cdots, \boldsymbol{a}_s\rangle = \langle \boldsymbol{b}_1, \boldsymbol{b}_2, \cdots, \boldsymbol{b}_s\rangle$ となることを示せ．

解答． $\langle \boldsymbol{a}_1, \boldsymbol{a}_2, \cdots, \boldsymbol{a}_{s-1}\rangle = \langle \boldsymbol{b}_1, \boldsymbol{b}_2, \cdots, \boldsymbol{b}_{s-1}\rangle$ であるから，$\boldsymbol{a}_s \in \langle \boldsymbol{b}_1, \boldsymbol{b}_2, \cdots, \boldsymbol{b}_s\rangle$ かつ $\boldsymbol{b}_s \in \langle \boldsymbol{a}_1, \boldsymbol{a}_2, \cdots, \boldsymbol{a}_s\rangle$ を示せば十分である．前者は

$$\boldsymbol{a}_s = \boldsymbol{b}_s + \sum_{t=1}^{s-1} k_t \boldsymbol{b}_t$$

であることから示され，後者は

$$\boldsymbol{b}_s = \boldsymbol{a}_s - \sum_{t=1}^{s-1} k_t \boldsymbol{b}_t$$

であることと，$\boldsymbol{a}_s \in \langle \boldsymbol{a}_1, \boldsymbol{a}_2, \cdots, \boldsymbol{a}_s \rangle$ かつ

$$\sum_{t=1}^{s-1} k_t \boldsymbol{b}_t \in \langle \boldsymbol{b}_1, \boldsymbol{b}_2, \cdots, \boldsymbol{b}_{s-1} \rangle = \langle \boldsymbol{a}_1, \boldsymbol{a}_2, \cdots, \boldsymbol{a}_{s-1} \rangle \subset \langle \boldsymbol{a}_1, \boldsymbol{a}_2, \cdots, \boldsymbol{a}_s \rangle$$

であることから示される．

注意．

- 問 1(ii) は次のようなことを暗に述べている: $\{\boldsymbol{a}_1, \boldsymbol{a}_2\}$ が 1 次独立であるとき，$\boldsymbol{a}_2$ は $\boldsymbol{a}_1$ と平行なベクトル

$$\frac{(\boldsymbol{a}_2, \boldsymbol{a}_1)}{(\boldsymbol{a}_1, \boldsymbol{a}_1)} \boldsymbol{a}_1$$

と $\boldsymbol{a}_1$ と直交するベクトル

$$\boldsymbol{a}_2 - \frac{(\boldsymbol{a}_2, \boldsymbol{a}_1)}{(\boldsymbol{a}_1, \boldsymbol{a}_1)} \boldsymbol{a}_1$$

に分解される．

- 問 1 と問 2 からとくに次のことがわかる: $\{\boldsymbol{a}_1, \boldsymbol{a}_2, \cdots, \boldsymbol{a}_r\}$ を部分空間 W の基底とするとき，

$$\boldsymbol{b}_s = \boldsymbol{a}_s - \sum_{t=1}^{s-1} \frac{(\boldsymbol{a}_s, \boldsymbol{b}_t)}{(\boldsymbol{b}_t, \boldsymbol{b}_t)} \boldsymbol{b}_t \quad (s = 1, 2, \cdots, r)$$

と定めれば，$\{\boldsymbol{b}_1, \boldsymbol{b}_2, \cdots, \boldsymbol{b}_r\}$ は属すどれも零ベクトルではない直交系で，W の生成系にもなる．「ベクトルの内積，正規直交系 演習問題２」問 2 より $\{\boldsymbol{b}_1, \boldsymbol{b}_2, \cdots, \boldsymbol{b}_r\}$ は 1 次独立であることもわかるので，$\{\boldsymbol{b}_1, \boldsymbol{b}_2, \cdots, \boldsymbol{b}_r\}$ は W の基底となる．さらに「ベクトルの内積，正規直交系 演習問題２」問 3 より

$$\boldsymbol{c}_s = \frac{1}{||\boldsymbol{b}_s||} \boldsymbol{b}_s \quad (s = 1, 2, \cdots, r)$$

とすると $\{\boldsymbol{c}_1, \boldsymbol{c}_2, \cdots, \boldsymbol{c}_r\}$ は正規直交系で W の生成系であることもわかるので，結果として $\{\boldsymbol{c}_1, \boldsymbol{c}_2, \cdots, \boldsymbol{c}_r\}$ は W の正規直交基底である．以上のように W の基底 $\{\boldsymbol{a}_1, \boldsymbol{a}_2, \cdots, \boldsymbol{a}_r\}$ から W の正規直交基底 $\{\boldsymbol{c}_1, \boldsymbol{c}_2, \cdots, \boldsymbol{c}_r\}$ を構成する方法を，**グラム・シュミットの正規直交化法**という．