ベクトルの内積，正規直交系　演習問題２　解答

$\mathbb{R}^n$ に内積 $(\cdot,\cdot)$ が与えられているとする．

- $\boldsymbol{a}_1, \boldsymbol{a}_2, \cdots, \boldsymbol{a}_r \in \mathbb{R}^n$ に対して，これらの中の相異なるどの 2 つのベクトルも互いに直交する，すなわち
$$i \neq j \quad \Rightarrow \quad (\boldsymbol{a}_i, \boldsymbol{a}_j) = 0$$
が成り立つとき，$\{\boldsymbol{a}_1, \boldsymbol{a}_2, \cdots, \boldsymbol{a}_r\}$ は**直交系**であるという．また，ノルムが 1 のベクトルからなる直交系，すなわちすべての $i\,(1 \leq i \leq r)$ に対して $\|\boldsymbol{a}_i\| = 1$ となる直交系を**正規直交系**という．

問 1. $\{\boldsymbol{a}_1, \boldsymbol{a}_2, \cdots, \boldsymbol{a}_r\}$ が正規直交系であることの必要十分条件は,
$$(\boldsymbol{a}_i, \boldsymbol{a}_j) = \begin{cases} 1 & (i = j) \\ 0 & (i \neq j) \end{cases}$$
であることを示せ.

解答. $\{\boldsymbol{a}_1, \boldsymbol{a}_2, \cdots, \boldsymbol{a}_r\}$ が正規直交系であるとき，$i \neq j$ ならば $(\boldsymbol{a}_i, \boldsymbol{a}_j) = 0$ かつどんな $1 \leq i \leq r$ についても $\|\boldsymbol{a}_i\| = 1$ が成り立つから,
$$(\boldsymbol{a}_i, \boldsymbol{a}_j) = \begin{cases} \|\boldsymbol{a}_i\|^2 & (i = j) \\ 0 & (i \neq j) \end{cases} = \begin{cases} 1 & (i = j) \\ 0 & (i \neq j) \end{cases}.$$
一方,
$$(\boldsymbol{a}_i, \boldsymbol{a}_j) = \begin{cases} 1 & (i = j) \\ 0 & (i \neq j) \end{cases}$$
が成り立つとき，とくに $\{\boldsymbol{a}_1, \boldsymbol{a}_2, \cdots, \boldsymbol{a}_r\}$ は直交系で，各 $1 \leq i \leq r$ について
$$\|\boldsymbol{a}_i\| = \sqrt{(\boldsymbol{a}_i, \boldsymbol{a}_i)} = \sqrt{1} = 1$$
が成り立つとわかる．よって $\{\boldsymbol{a}_1, \boldsymbol{a}_2, \cdots, \boldsymbol{a}_r\}$ は正規直交系である． ■

問 2. $\{\boldsymbol{a}_1, \boldsymbol{a}_2, \cdots, \boldsymbol{a}_r\}$ は直交系で，属すどのベクトルも零ベクトルではないとする．このとき，$\{\boldsymbol{a}_1, \boldsymbol{a}_2, \cdots, \boldsymbol{a}_r\}$ は 1 次独立となることを示せ.

解答. $c_1\boldsymbol{a}_1 + c_2\boldsymbol{a}_2 + \cdots + c_r\boldsymbol{a}_r = \boldsymbol{o}$ とし，$1 \leq i \leq r$ とする．このとき $c_i = 0$ が成り立つことを示せばよい．どんな $\boldsymbol{a} \in \mathbb{R}^n$ に対しても $(\boldsymbol{o}, \boldsymbol{a}) = 0$ が成り立つことに注意すれば[*1],
$$(c_1\boldsymbol{a}_1 + c_2\boldsymbol{a}_2 + \cdots + c_r\boldsymbol{a}_r, \boldsymbol{a}_i) = (\boldsymbol{o}, \boldsymbol{a}_i) = 0.$$
一方，内積の性質と $\{\boldsymbol{a}_1, \boldsymbol{a}_2, \cdots, \boldsymbol{a}_r\}$ が直交系であることから
$$(c_1\boldsymbol{a}_1 + c_2\boldsymbol{a}_2 + \cdots + c_r\boldsymbol{a}_r, \boldsymbol{a}_i) = c_1(\boldsymbol{a}_1, \boldsymbol{a}_i) + c_2(\boldsymbol{a}_2, \boldsymbol{a}_i) + \cdots + c_r(\boldsymbol{a}_r, \boldsymbol{a}_i) = c_i(\boldsymbol{a}_i, \boldsymbol{a}_i)$$
とわかり，よって $c_i(\boldsymbol{a}_i, \boldsymbol{a}_i) = 0$ を得る．$\boldsymbol{a}_i \neq \boldsymbol{o}$ であるから，$(\boldsymbol{a}_i, \boldsymbol{a}_i) \neq 0$．したがって，$c_i = 0$ が成り立つ． ■

[*1] 例えば「ベクトルの内積，正規直交系 演習問題 1」問 1 をみよ．

問 3. $\{\boldsymbol{b}_1, \boldsymbol{b}_2, \cdots, \boldsymbol{b}_r\}$ は直交系で，属すどのベクトルも零ベクトルではないとする．このとき，

$$\boldsymbol{c}_i = \frac{1}{\|\boldsymbol{b}_i\|}\boldsymbol{b}_i \quad (i = 1, 2, \cdots, r)$$

とすれば，$\{\boldsymbol{c}_1, \boldsymbol{c}_2, \cdots, \boldsymbol{c}_r\}$ は正規直交系で，さらに $\langle \boldsymbol{b}_1, \boldsymbol{b}_2, \cdots, \boldsymbol{b}_r \rangle = \langle \boldsymbol{c}_1, \boldsymbol{c}_2, \cdots, \boldsymbol{c}_r \rangle$ となることを示せ．

解答. 内積の性質から

$$\begin{aligned}(\boldsymbol{c}_i, \boldsymbol{c}_j) &= \left(\frac{1}{\|\boldsymbol{b}_i\|}\boldsymbol{b}_i, \frac{1}{\|\boldsymbol{b}_j\|}\boldsymbol{b}_j\right) = \frac{1}{\|\boldsymbol{b}_i\|}\frac{1}{\|\boldsymbol{b}_j\|}(\boldsymbol{b}_i, \boldsymbol{b}_j) \\ &= \begin{cases} \|\boldsymbol{b}_i\|^2/\|\boldsymbol{b}_i\|^2 & (i = j) \\ 0 & (i \neq j) \end{cases} = \begin{cases} 1 & (i = j) \\ 0 & (i \neq j) \end{cases}.\end{aligned}$$

したがって，問 2 より $\{\boldsymbol{c}_1, \boldsymbol{c}_2, \cdots, \boldsymbol{c}_r\}$ は正規直交系である．

次に $\langle \boldsymbol{b}_1, \boldsymbol{b}_2, \cdots, \boldsymbol{b}_r \rangle = \langle \boldsymbol{c}_1, \boldsymbol{c}_2, \cdots, \boldsymbol{c}_r \rangle$ を示す．$\boldsymbol{x} \in \langle \boldsymbol{b}_1, \boldsymbol{b}_2, \cdots, \boldsymbol{b}_r \rangle$ をとる．このとき $\boldsymbol{x}$ は，ある $x_1, x_2, \cdots, x_r \in \mathbb{R}$ を用いて

$$\boldsymbol{x} = x_1\boldsymbol{b}_1 + x_2\boldsymbol{b}_2 + \cdots + x_r\boldsymbol{b}_r$$

と表される．よって

$$\begin{aligned}\boldsymbol{x} &= x_1\boldsymbol{b}_1 + x_2\boldsymbol{b}_2 + \cdots + x_r\boldsymbol{b}_r \\ &= x_1(\|\boldsymbol{b}_1\|\boldsymbol{c}_1) + x_2(\|\boldsymbol{b}_2\|\boldsymbol{c}_2) + \cdots + x_r(\|\boldsymbol{b}_r\|\boldsymbol{b}_r) \\ &= (x_1\|\boldsymbol{b}_1\|)\boldsymbol{c}_1 + (x_2\|\boldsymbol{b}_2\|)\boldsymbol{c}_2 + \cdots + (x_r\|\boldsymbol{b}_r\|)\boldsymbol{c}_r \in \langle \boldsymbol{c}_1, \boldsymbol{c}_2, \cdots, \boldsymbol{c}_r \rangle\end{aligned}$$

とわかる．したがって $\langle \boldsymbol{b}_1, \boldsymbol{b}_2, \cdots, \boldsymbol{b}_r \rangle \subset \langle \boldsymbol{c}_1, \boldsymbol{c}_2, \cdots, \boldsymbol{c}_r \rangle$．また，任意に $\boldsymbol{y} \in \langle \boldsymbol{c}_1, \boldsymbol{c}_2, \cdots, \boldsymbol{c}_r \rangle$ をとる．このとき $\boldsymbol{y}$ は，ある $y_1, y_2, \cdots, y_r \in \mathbb{R}$ が存在して，

$$\boldsymbol{y} = y_1\boldsymbol{c}_1 + y_2\boldsymbol{c}_2 + \cdots + y_r\boldsymbol{c}_r$$

と表される．よって

$$\begin{aligned}\boldsymbol{y} &= y_1\boldsymbol{c}_1 + y_2\boldsymbol{c}_2 + \cdots + y_r\boldsymbol{c}_r \\ &= y_1\left(\frac{1}{\|\boldsymbol{b}_1\|}\boldsymbol{b}_1\right) + y_2\left(\frac{1}{\|\boldsymbol{b}_2\|}\boldsymbol{b}_2\right) + \cdots + y_r\left(\frac{1}{\|\boldsymbol{b}_r\|}\boldsymbol{c}_r\right) \\ &= \left(\frac{y_1}{\|\boldsymbol{b}_1\|}\right)\boldsymbol{b}_1 + \left(\frac{y_2}{\|\boldsymbol{b}_2\|}\right)\boldsymbol{b}_2 + \cdots + \left(\frac{y_r}{\|\boldsymbol{b}_r\|}\right)\boldsymbol{b}_r \in \langle \boldsymbol{b}_1, \boldsymbol{b}_2, \cdots, \boldsymbol{b}_r \rangle\end{aligned}$$

とわかる．したがって $\langle \boldsymbol{c}_1, \boldsymbol{c}_2, \cdots, \boldsymbol{c}_r \rangle \subset \langle \boldsymbol{b}_1, \boldsymbol{b}_2, \cdots, \boldsymbol{b}_r \rangle$．以上より $\langle \boldsymbol{b}_1, \boldsymbol{b}_2, \cdots, \boldsymbol{b}_r \rangle = \langle \boldsymbol{c}_1, \boldsymbol{c}_2, \cdots, \boldsymbol{c}_r \rangle$ を得る． ■