# ベクトルの内積，正規直交系　演習問題１　解答

各 $\boldsymbol{a}, \boldsymbol{b} \in \mathbb{R}^n$ に対し，$(\boldsymbol{a}, \boldsymbol{b}) \in \mathbb{R}$ がただ 1 つ定まっていて，

(i) $\boldsymbol{a}, \boldsymbol{b} \in \mathbb{R}^n$ に対し，$(\boldsymbol{a}, \boldsymbol{b}) = (\boldsymbol{b}, \boldsymbol{a})$,

(ii) $\boldsymbol{a}, \boldsymbol{b}, \boldsymbol{c} \in \mathbb{R}^n$ に対し，$(\boldsymbol{a} + \boldsymbol{b}, \boldsymbol{c}) = (\boldsymbol{a}, \boldsymbol{c}) + (\boldsymbol{b}, \boldsymbol{c})$,

(iii) $k \in \mathbb{R}$, $\boldsymbol{a}, \boldsymbol{b} \in \mathbb{R}^n$ に対し，$(k\boldsymbol{a}, \boldsymbol{b}) = k(\boldsymbol{a}, \boldsymbol{b})$,

(iv) $\boldsymbol{a} \in \mathbb{R}^n$ に対し，$(\boldsymbol{a}, \boldsymbol{a}) \geq 0$ であり，$(\boldsymbol{a}, \boldsymbol{a}) = 0 \Leftrightarrow \boldsymbol{a} = \boldsymbol{o}$

をみたすとき，$(\cdot, \cdot)$ を $\mathbb{R}^n$ 上の**内積**という．(i) と (ii)，(i) と (iii) からそれぞれ

- $\boldsymbol{a}, \boldsymbol{b}, \boldsymbol{c} \in \mathbb{R}^n$ に対し，$(\boldsymbol{a}, \boldsymbol{b} + \boldsymbol{c}) = (\boldsymbol{a}, \boldsymbol{b}) + (\boldsymbol{a}, \boldsymbol{c})$,
- $k \in \mathbb{R}$, $\boldsymbol{a}$、$\boldsymbol{b} \in \mathbb{R}^n$ に対し，$(\boldsymbol{a}, k\boldsymbol{b}) = k(\boldsymbol{a}, \boldsymbol{b})$

が成り立つことに注意せよ．また，これらの性質を複数回用いることで，$k_i, \ell_j \in \mathbb{R}$, $\boldsymbol{a}_i, \boldsymbol{b}_j \in \mathbb{R}^n$ $(i = 1, 2, \cdots, p, j = 1, 2, \cdots q)$ に対し

$$\left( \sum_{i=1}^{p} k_i \boldsymbol{a}_i, \sum_{j=1}^{q} \ell_j \boldsymbol{b}_j \right) = \sum_{i=1}^{p} \sum_{j=1}^{q} k_i \ell_j (\boldsymbol{a}_i, \boldsymbol{b}_j)$$

が成り立つこともわかる．また，$\boldsymbol{a} \in \mathbb{R}^n$ に対し，

$$\|\boldsymbol{a}\| = \sqrt{(\boldsymbol{a}, \boldsymbol{a})}$$

を $\boldsymbol{a}$ の**大きさ**（または**ノルム**）という．

以下では，$\mathbb{R}^n$ に内積 $(\cdot, \cdot)$ が与えられているとする．

**問 1.** $\boldsymbol{a} \in \mathbb{R}^n$ に対し，$(\boldsymbol{a}, \boldsymbol{o}) = 0$ となることを示せ．

**解答.**

$$(\boldsymbol{a}, \boldsymbol{o}) = (\boldsymbol{a}, \boldsymbol{o} + \boldsymbol{o}) = (\boldsymbol{a}, \boldsymbol{o}) + (\boldsymbol{a}, \boldsymbol{o}) = 2(\boldsymbol{a}, \boldsymbol{o})$$

より，$(\boldsymbol{a}, \boldsymbol{o}) = 0$ を得る．■

**問 2.** 以下がそれぞれ成り立つことを示せ．

(i) $\boldsymbol{a} \in \mathbb{R}^n$ に対し，$\|\boldsymbol{a}\| \geq 0$ であり，$\|\boldsymbol{a}\| = 0 \Leftrightarrow \boldsymbol{a} = \boldsymbol{o}$.

(ii) $k \in \mathbb{R}$, $\boldsymbol{a} \in \mathbb{R}^n$ に対し，$\|k\boldsymbol{a}\| = |k|\|\boldsymbol{a}\|$.

(iii) $\boldsymbol{a}, \boldsymbol{b} \in \mathbb{R}^n$ に対し，$|(\boldsymbol{a}, \boldsymbol{b})| \leq \|\boldsymbol{a}\|\|\boldsymbol{b}\|$. *1

(iv) $\boldsymbol{a}, \boldsymbol{b}, \boldsymbol{c} \in \mathbb{R}^n$ に対し，$\|\boldsymbol{a} + \boldsymbol{b}\| \leq \|\boldsymbol{a}\| + \|\boldsymbol{b}\|$. *2

**解答.**　(i) 内積とノルムの定義より，$\|\boldsymbol{a}\| = \sqrt{(\boldsymbol{a}, \boldsymbol{a})} \geq 0$ であり，

$$\begin{aligned} \|\boldsymbol{a}\| = 0 \quad &\Leftrightarrow \quad \sqrt{(\boldsymbol{a}, \boldsymbol{a})} = 0 \\ &\Leftrightarrow \quad (\boldsymbol{a}, \boldsymbol{a}) = 0 \\ &\Leftrightarrow \quad \boldsymbol{a} = \boldsymbol{o} \end{aligned}$$

*1 シュワルツの不等式とよばれる．

*2 三角不等式とよばれる．

とわかる. ■

(ii) ノルムの定義と内積の性質から

$$\|k\boldsymbol{a}\| = \sqrt{(k\boldsymbol{a}, k\boldsymbol{a})} = \sqrt{k^2(\boldsymbol{a}, \boldsymbol{a})} = |k|\sqrt{(\boldsymbol{a}, \boldsymbol{a})} = |k|\|\boldsymbol{a}\|$$

を得る. ■

(iii) すべての $t \in \mathbb{R}$ について

$$\begin{aligned} 0 &\leq \|t\boldsymbol{a} + \boldsymbol{b}\|^2 = (t\boldsymbol{a} + \boldsymbol{b}, t\boldsymbol{a} + \boldsymbol{b}) = t^2(\boldsymbol{a}, \boldsymbol{a}) + t(\boldsymbol{a}, \boldsymbol{b}) + t(\boldsymbol{b}, \boldsymbol{a}) + (\boldsymbol{b}, \boldsymbol{b}) \\ &= \|\boldsymbol{a}\|^2 t^2 + 2(\boldsymbol{a}, \boldsymbol{b})t + \|\boldsymbol{b}\|^2 \end{aligned}$$

であるから，最右辺の $t$ に関する 2 次式の判別式より

$$(\boldsymbol{a}, \boldsymbol{b})^2 - \|\boldsymbol{a}\|^2\|\boldsymbol{b}\|^2 \leq 0,$$

すなわち

$$(\boldsymbol{a}, \boldsymbol{b})^2 \leq \|\boldsymbol{a}\|^2\|\boldsymbol{b}\|^2$$

が成り立つとわかる．両辺の正の平方根をとって，目的の不等式を得る. ■

(iv) (iii) の不等式を用いれば

$$\begin{aligned} \|\boldsymbol{a} + \boldsymbol{b}\|^2 &= (\boldsymbol{a} + \boldsymbol{b}, \boldsymbol{a} + \boldsymbol{b}) = (\boldsymbol{a}, \boldsymbol{a}) + (\boldsymbol{a}, \boldsymbol{b}) + (\boldsymbol{b}, \boldsymbol{a}) + (\boldsymbol{b}, \boldsymbol{b}) = \|\boldsymbol{a}\|^2 + 2(\boldsymbol{a}, \boldsymbol{b}) + \|\boldsymbol{b}\|^2 \\ &\leq \|\boldsymbol{a}\|^2 + 2\|\boldsymbol{a}\|\|\boldsymbol{b}\| + \|\boldsymbol{b}\|^2 = (\|\boldsymbol{a}\| + \|\boldsymbol{b}\|)^2 \end{aligned}$$

とわかるから，$\|\boldsymbol{a} + \boldsymbol{b}\| \leq \|\boldsymbol{a}\| + \|\boldsymbol{b}\|$ を得る. ■

**問 3.** $\boldsymbol{a}, \boldsymbol{b} \in \mathbb{R}^n$ に対し，

$$\|\boldsymbol{a} + \boldsymbol{b}\|^2 + \|\boldsymbol{a} - \boldsymbol{b}\|^2 = 2(\|\boldsymbol{a}\|^2 + \|\boldsymbol{b}\|^2)$$

が成り立つことを示せ.

**解答.** 前問 (iv) の証明中に示したように

$$\|\boldsymbol{a} + \boldsymbol{b}\|^2 = \|\boldsymbol{a}\|^2 + 2(\boldsymbol{a}, \boldsymbol{b}) + \|\boldsymbol{b}\|^2$$

である．また，この等式の $\boldsymbol{b}$ を $-\boldsymbol{b}$ と置き換えれば

$$\|\boldsymbol{a} - \boldsymbol{b}\|^2 = \|\boldsymbol{a}\|^2 - 2(\boldsymbol{a}, \boldsymbol{b}) + \|\boldsymbol{b}\|^2$$

とわかる．辺々足して，目的の等式を得る. ■

**問 4.** $\boldsymbol{a}, \boldsymbol{b} \in \mathbb{R}^n$ に対し，

$$(\boldsymbol{a}, \boldsymbol{b}) = \frac{1}{4}(\|\boldsymbol{a} + \boldsymbol{b}\|^2 - \|\boldsymbol{a} - \boldsymbol{b}\|^2) \tag{1.1}$$

が成り立つことを示せ.

**解答.** 前問でも述べたように

$$\begin{aligned} \|\boldsymbol{a} + \boldsymbol{b}\|^2 &= \|\boldsymbol{a}\|^2 + 2(\boldsymbol{a}, \boldsymbol{b}) + \|\boldsymbol{b}\|^2, \\ \|\boldsymbol{a} - \boldsymbol{b}\|^2 &= \|\boldsymbol{a}\|^2 - 2(\boldsymbol{a}, \boldsymbol{b}) + \|\boldsymbol{b}\|^2 \end{aligned}$$

であるから辺々引いて

$$\|\boldsymbol{a}+\boldsymbol{b}\|^2 - \|\boldsymbol{a}-\boldsymbol{b}\|^2 = 4(\boldsymbol{a},\boldsymbol{b})$$

とわかるので，両辺 4 で割って

$$(\boldsymbol{a},\boldsymbol{b}) = \frac{1}{4}(\|\boldsymbol{a}+\boldsymbol{b}\|^2 - \|\boldsymbol{a}-\boldsymbol{b}\|^2)$$

とわかる． ■

**補足** より一般に各 $\boldsymbol{a} \in \mathbb{R}^n$ に対し，$\|\boldsymbol{a}\| \in \mathbb{R}$ がただ 1 つ定まっていて，問 2 の (i), (ii), (iv) の性質が成り立つとき，$\|\cdot\|$ を $\mathbb{R}^n$ 上の**ノルム**という．また，ノルムに対して問 3 は中線定理とよばれる．本演習問題でわかったことは

- $\mathbb{R}^n$ 上に内積が与えられると，$\|\boldsymbol{a}\| = \sqrt{(\boldsymbol{a},\boldsymbol{a})}$ としてノルムが定まる．
- 内積から定まったノルムは中線定理をみたす．

である．実は逆に，一般のノルムであって，それが中線定理をみたすならば，$(\boldsymbol{a},\boldsymbol{b})$ を問 4 の等式右辺のようにノルムを用いて定めるとこれは内積になっていることがわかり，$\|\boldsymbol{a}\| = \sqrt{(\boldsymbol{a},\boldsymbol{a})}$ が成り立つことが知られている．言い換えれば，ノルムがある内積を用いて $\|\boldsymbol{a}\| = \sqrt{(\boldsymbol{a},\boldsymbol{a})}$ と定まることの必要十分条件は，それが中線定理をみたすことである．