線形写像の表現行列　演習問題３

本演習問題における基底取り替え行列は，次の意味で用いる[*1].

- $\mathcal{A}=\{\boldsymbol{a}_1,\boldsymbol{a}_2,\ldots,\boldsymbol{a}_n\}$ と $\mathcal{B}=\{\boldsymbol{b}_1,\boldsymbol{b}_2,\ldots,\boldsymbol{b}_n\}$ を $\mathbb{R}^n$ の 2 組の基底とする．このとき $\boldsymbol{b}_1,\boldsymbol{b}_2,\ldots,\boldsymbol{b}_n\in\mathbb{R}^n$ で $\mathcal{A}=\{\boldsymbol{a}_1,\boldsymbol{a}_2,\ldots,\boldsymbol{a}_n\}$ が $\mathbb{R}^n$ の基底であるから

$$\begin{cases} \boldsymbol{b}_1 = p_{11}\boldsymbol{a}_1 + p_{21}\boldsymbol{a}_2 + \cdots + p_{n1}\boldsymbol{a}_n \\ \boldsymbol{b}_2 = p_{12}\boldsymbol{a}_1 + p_{22}\boldsymbol{a}_2 + \cdots + p_{n2}\boldsymbol{a}_n \\ \qquad\vdots \\ \boldsymbol{b}_n = p_{1n}\boldsymbol{a}_1 + p_{2n}\boldsymbol{a}_2 + \cdots + p_{nn}\boldsymbol{a}_n \end{cases} \tag{2.1}$$

と一意的に表せる．このとき n 次正方行列

$$P=\begin{bmatrix} p_{11} & p_{12} & \cdots & p_{1n} \\ p_{21} & p_{22} & \cdots & p_{2n} \\ \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ p_{n1} & p_{n2} & \cdots & p_{nn} \end{bmatrix}$$

を基底 $\mathcal{A}$ から基底 $\mathcal{B}$ への**基底取り替え行列**という．名前の通り，基底を $\mathcal{A}$ から $\mathcal{B}$ へ取り替えたとき，その違いを表す行列である．実際，連立した式 (2.1) は行列を使って

$$[\boldsymbol{b}_1,\boldsymbol{b}_2,\ldots,\boldsymbol{b}_n]=[\boldsymbol{a}_1,\boldsymbol{a}_2,\ldots,\boldsymbol{a}_n]P$$

と表せることに注意せよ．$\mathcal{A}=\{\boldsymbol{a}_1,\boldsymbol{a}_2,\ldots,\boldsymbol{a}_n\}$ は $\mathbb{R}^n$ の基底であり，とくに 1 次独立な $\mathbb{R}^n$ に属す n 個のベクトルの組であるから，$[\boldsymbol{a}_1,\boldsymbol{a}_2,\ldots,\boldsymbol{a}_n]$ は正則になることに注意すると，基底 $\mathcal{A}$ から基底 $\mathcal{B}$ への基底取り替え行列は

$$P=[\boldsymbol{a}_1,\boldsymbol{a}_2,\ldots,\boldsymbol{a}_n]^{-1}[\boldsymbol{b}_1,\boldsymbol{b}_2,\ldots,\boldsymbol{b}_n] \tag{2.2}$$

で定まる n 次正方行列であると言い換えることもできる．

以上を踏まえた上で，次の問に答えよ．

問題 1. $\mathcal{A}=\{\boldsymbol{a}_1,\boldsymbol{a}_2,\ldots,\boldsymbol{a}_n\}$ と $\mathcal{B}=\{\boldsymbol{b}_1,\boldsymbol{b}_2,\ldots,\boldsymbol{b}_n\}$ を $\mathbb{R}^n$ の 2 組の基底とし，P を基底 $\mathcal{A}$ から基底 $\mathcal{B}$ への基底取り替え行列とする．このとき，以下の問に答えよ．

(i) P は正則行列であり，P^{-1} は基底 $\mathcal{B}$ から基底 $\mathcal{A}$ への基底取り替え行列になることを示せ．

(ii) $\mathrm{id}\colon\mathbb{R}^n\to\mathbb{R}^n$ を恒等写像とする．すなわち各 $\boldsymbol{x}\in\mathbb{R}^n$ に対して $\mathrm{id}(\boldsymbol{x})=\boldsymbol{x}$ で定まる線形写像である．その基底 $\mathcal{B}$ と基底 $\mathcal{A}$ に関する表現行列は P と等しいことを示せ．

(iii) $\boldsymbol{x}\in\mathbb{R}^n$ に対し，その $\mathcal{A}$ に関する座標と $\mathcal{B}$ に関する座標をそれぞれ

$$\begin{bmatrix} x_1 \\ x_2 \\ \vdots \\ x_n \end{bmatrix},\quad \begin{bmatrix} x'_1 \\ x'_2 \\ \vdots \\ x'_n \end{bmatrix}$$

[*1] 定義や記号の使い方は，「村上正康・佐藤恒雄・野澤宗平・稲葉尚志 共著，教養の線形代数 六訂版，培風館」を参考にしている．基底に関する座標，線形写像に関する表現行列は，同テキストもしくは直前の演習問題である「線形写像の表現行列演習問題２」を見よ．

とする．このとき

$$\begin{bmatrix} x_1 \\ x_2 \\ \vdots \\ x_n \end{bmatrix} = P \begin{bmatrix} x'_1 \\ x'_2 \\ \vdots \\ x'_n \end{bmatrix}$$

となることを示せ（つまり，旧座標は新座標に左から基底取り替え行列を掛けたものと等しい）．

問題 2. $f\colon \mathbb{R}^n \to \mathbb{R}^m$ を線形写像とし，

- $\mathcal{A} = \{\boldsymbol{a}_1, \boldsymbol{a}_2, \ldots, \boldsymbol{a}_n\}$ と $\mathcal{B} = \{\boldsymbol{b}_1, \boldsymbol{b}_2, \ldots, \boldsymbol{b}_n\}$ を $\mathbb{R}^n$ の 2 組の基底
- $\mathcal{C} = \{\boldsymbol{c}_1, \boldsymbol{c}_2, \ldots, \boldsymbol{c}_m\}$ と $\mathcal{D} = \{\boldsymbol{d}_1, \boldsymbol{d}_2, \ldots, \boldsymbol{d}_m\}$ を $\mathbb{R}^m$ の 2 組の基底,
- F を基底 $\mathcal{A}$ と基底 $\mathcal{C}$ に関する f の表現行列
- G を基底 $\mathcal{B}$ と基底 $\mathcal{D}$ に関する f の表現行列
- P を基底 $\mathcal{A}$ から基底 $\mathcal{B}$ への基底取り替え行列
- Q を基底 $\mathcal{C}$ から基底 $\mathcal{D}$ への基底取り替え行列

とする．このとき

$$G = Q^{-1}FP$$

が成立することを示せ

（Hint：各 $\boldsymbol{x} \in \mathbb{R}^n$ と，$\boldsymbol{y} = f(\boldsymbol{x}) \in \mathbb{R}^m$ に対し，$\boldsymbol{x}$ の $\mathcal{A}$ と $\mathcal{B}$ に関するそれぞれの座標，$\boldsymbol{y}$ の $\mathcal{C}$ と $\mathcal{D}$ に関するそれぞれの座標を考え，これらの関係性に注目せよ.）.