線形写像の表現行列　演習問題３　解答例

本演習問題における基底取り替え行列は，次の意味で用いる[*1].

- $\mathcal{A}=\{\boldsymbol{a}_1,\boldsymbol{a}_2,\dots,\boldsymbol{a}_n\}$ と $\mathcal{B}=\{\boldsymbol{b}_1,\boldsymbol{b}_2,\dots,\boldsymbol{b}_n\}$ を $\mathbb{R}^n$ の 2 組の基底とする．このとき $\boldsymbol{b}_1,\boldsymbol{b}_2,\dots,\boldsymbol{b}_n\in\mathbb{R}^n$ で $\mathcal{A}=\{\boldsymbol{a}_1,\boldsymbol{a}_2,\dots,\boldsymbol{a}_n\}$ が $\mathbb{R}^n$ の基底であるから

$$\begin{cases} \boldsymbol{b}_1 = p_{11}\boldsymbol{a}_1 + p_{21}\boldsymbol{a}_2 + \cdots + p_{n1}\boldsymbol{a}_n \\ \boldsymbol{b}_2 = p_{12}\boldsymbol{a}_1 + p_{22}\boldsymbol{a}_2 + \cdots + p_{n2}\boldsymbol{a}_n \\ \qquad\vdots \\ \boldsymbol{b}_n = p_{1n}\boldsymbol{a}_1 + p_{2n}\boldsymbol{a}_2 + \cdots + p_{nn}\boldsymbol{a}_n \end{cases} \tag{2.1}$$

と一意的に表せる．このとき n 次正方行列

$$P=\begin{bmatrix} p_{11} & p_{12} & \cdots & p_{1n} \\ p_{21} & p_{22} & \cdots & p_{2n} \\ \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ p_{n1} & p_{n2} & \cdots & p_{nn} \end{bmatrix}$$

を基底 $\mathcal{A}$ から基底 $\mathcal{B}$ への**基底取り替え行列**という．名前の通り，基底を $\mathcal{A}$ から $\mathcal{B}$ へ取り替えたとき，その違いを表す行列である．実際，連立した式 (2.1) は行列を使って

$$[\boldsymbol{b}_1,\boldsymbol{b}_2,\dots,\boldsymbol{b}_n]=[\boldsymbol{a}_1,\boldsymbol{a}_2,\dots,\boldsymbol{a}_n]P$$

と表せることに注意せよ．$\mathcal{A}=\{\boldsymbol{a}_1,\boldsymbol{a}_2,\dots,\boldsymbol{a}_n\}$ は $\mathbb{R}^n$ の基底であり，とくに 1 次独立な $\mathbb{R}^n$ に属す n 個のベクトルの組であるから，$[\boldsymbol{a}_1,\boldsymbol{a}_2,\dots,\boldsymbol{a}_n]$ は正則になることに注意すると，基底 $\mathcal{A}$ から基底 $\mathcal{B}$ への基底取り替え行列は

$$P=[\boldsymbol{a}_1,\boldsymbol{a}_2,\dots,\boldsymbol{a}_n]^{-1}[\boldsymbol{b}_1,\boldsymbol{b}_2,\dots,\boldsymbol{b}_n] \tag{2.2}$$

で定まる n 次正方行列であると言い換えることもできる．

以上を踏まえた上で，次の問に答えよ．

問題 1. $\mathcal{A}=\{\boldsymbol{a}_1,\boldsymbol{a}_2,\dots,\boldsymbol{a}_n\}$ と $\mathcal{B}=\{\boldsymbol{b}_1,\boldsymbol{b}_2,\dots,\boldsymbol{b}_n\}$ を $\mathbb{R}^n$ の 2 組の基底とし，P を基底 $\mathcal{A}$ から基底 $\mathcal{B}$ への基底取り替え行列とする．このとき，以下の問に答えよ．

(i) P は正則行列であり，P^{-1} は基底 $\mathcal{B}$ から基底 $\mathcal{A}$ への基底取り替え行列になることを示せ．

解答. (2.2) を思い出すと，$P=[\boldsymbol{a}_1,\boldsymbol{a}_2,\dots,\boldsymbol{a}_n]^{-1}[\boldsymbol{b}_1,\boldsymbol{b}_2,\dots,\boldsymbol{b}_n]$ であり，正則な 2 つの行列 $[\boldsymbol{a}_1,\boldsymbol{a}_2,\dots,\boldsymbol{a}_n]^{-1}$ と $[\boldsymbol{b}_1,\boldsymbol{b}_2,\dots,\boldsymbol{b}_n]$ の積である P も正則である（正則行列同士の積や正則行列の逆行列は正則であった）．また，P^{-1} は

$$\begin{aligned} P^{-1} &= ([\boldsymbol{a}_1,\boldsymbol{a}_2,\dots,\boldsymbol{a}_n]^{-1}[\boldsymbol{b}_1,\boldsymbol{b}_2,\dots,\boldsymbol{b}_n])^{-1} = [\boldsymbol{b}_1,\boldsymbol{b}_2,\dots,\boldsymbol{b}_n]^{-1}([\boldsymbol{a}_1,\boldsymbol{a}_2,\dots,\boldsymbol{a}_n]^{-1})^{-1} \\ &= [\boldsymbol{b}_1,\boldsymbol{b}_2,\dots,\boldsymbol{b}_n]^{-1}[\boldsymbol{a}_1,\boldsymbol{a}_2,\dots,\boldsymbol{a}_n], \end{aligned}$$

すなわち $[\boldsymbol{a}_1,\boldsymbol{a}_2,\dots,\boldsymbol{a}_n]=[\boldsymbol{b}_1,\boldsymbol{b}_2,\dots,\boldsymbol{b}_n]P^{-1}$ となるから，P^{-1} は基底 $\mathcal{B}$ から基底 $\mathcal{A}$ への基底取り替え行列である． ■

[*1] 定義や記号の使い方は，「村上正康・佐藤恒雄・野澤宗平・稲葉尚志 共著，教養の線形代数 六訂版，培風館」を参考にしている．基底に関する座標，線形写像に関する表現行列は，同テキストもしくは直前の演習問題である「線形写像の表現行列演習問題２」を見よ．

(ii) $\mathrm{id}\colon \mathbb{R}^n \to \mathbb{R}^n$ を恒等写像とする．すなわち各 $\boldsymbol{x} \in \mathbb{R}^n$ に対して $\mathrm{id}(\boldsymbol{x}) = \boldsymbol{x}$ で定まる線形写像である．その基底 $\mathcal{B}$ と基底 $\mathcal{A}$ に関する表現行列は P と等しいことを示せ．

解答. id の $\mathcal{B}$ と $\mathcal{A}$ に関する表現行列を F とおくと，F は

$$[\mathrm{id}(\boldsymbol{b}_1), \mathrm{id}(\boldsymbol{b}_2), \ldots, \mathrm{id}(\boldsymbol{b}_n)] = [\boldsymbol{a}_1, \boldsymbol{a}_2, \ldots, \boldsymbol{a}_n]F$$

をみたすただ 1 つの行列であった．一方，id と基底取り替え行列の定義から

$$[\mathrm{id}(\boldsymbol{b}_1), \mathrm{id}(\boldsymbol{b}_2), \ldots, \mathrm{id}(\boldsymbol{b}_n)] = [\boldsymbol{b}_1, \boldsymbol{b}_2, \ldots, \boldsymbol{b}_n] = [\boldsymbol{a}_1, \boldsymbol{a}_2, \ldots, \boldsymbol{a}_n]P$$

が成り立つ．よって $F = P$ とわかる． ■

(iii) $\boldsymbol{x} \in \mathbb{R}^n$ に対し，その $\mathcal{A}$ に関する座標と $\mathcal{B}$ に関する座標をそれぞれ

$$\begin{bmatrix} x_1 \\ x_2 \\ \vdots \\ x_n \end{bmatrix}, \quad \begin{bmatrix} x_1' \\ x_2' \\ \vdots \\ x_n' \end{bmatrix}$$

とする．このとき

$$\begin{bmatrix} x_1 \\ x_2 \\ \vdots \\ x_n \end{bmatrix} = P \begin{bmatrix} x_1' \\ x_2' \\ \vdots \\ x_n' \end{bmatrix}$$

となることを示せ（つまり，旧座標は新座標に左から基底取り替え行列を掛けたものと等しい）．

解答. (ii) より P は恒等写像 $\mathrm{id}\colon \mathbb{R}^n \to \mathbb{R}^n$ の基底 $\mathcal{B}$ と基底 $\mathcal{A}$ に関する表現行列であるから，$\boldsymbol{x}$ の $\mathcal{B}$ に関する座標と $\mathrm{id}(\boldsymbol{x}) = \boldsymbol{x}$ の $\mathcal{A}$ に関する座標の関係から示すこともできる．ここではより直接的に示す．$\boldsymbol{x}$ の $\mathcal{A} = \{\boldsymbol{a}_1, \boldsymbol{a}_2, \ldots, \boldsymbol{a}_n\}$ に関する座標が

$$\begin{bmatrix} x_1 \\ x_2 \\ \vdots \\ x_n \end{bmatrix}$$

であるということは

$$\boldsymbol{x} = x_1\boldsymbol{a}_1 + x_2\boldsymbol{a}_2 + \cdots + x_n\boldsymbol{a}_n = [\boldsymbol{a}_1, \boldsymbol{a}_2, \ldots, \boldsymbol{a}_n] \begin{bmatrix} x_1 \\ x_2 \\ \vdots \\ x_n \end{bmatrix}$$

という意味であった．同様に

$$\boldsymbol{x} = x_1'\boldsymbol{b}_1 + x_2'\boldsymbol{b}_2 + \cdots + x_n'\boldsymbol{b}_n = [\boldsymbol{b}_1, \boldsymbol{b}_2, \ldots, \boldsymbol{b}_n] \begin{bmatrix} x_1' \\ x_2' \\ \vdots \\ x_n' \end{bmatrix}$$

とわかるので

$$[\boldsymbol{a}_1, \boldsymbol{a}_2, \ldots, \boldsymbol{a}_n] \begin{bmatrix} x_1 \\ x_2 \\ \vdots \\ x_n \end{bmatrix} = [\boldsymbol{b}_1, \boldsymbol{b}_2, \ldots, \boldsymbol{b}_n] \begin{bmatrix} x'_1 \\ x'_2 \\ \vdots \\ x'_n \end{bmatrix}$$

を得る．したがって (2.2) を思い出せば

$$\begin{bmatrix} x_1 \\ x_2 \\ \vdots \\ x_n \end{bmatrix} = [\boldsymbol{a}_1, \boldsymbol{a}_2, \ldots, \boldsymbol{a}_n]^{-1} [\boldsymbol{b}_1, \boldsymbol{b}_2, \ldots, \boldsymbol{b}_n] \begin{bmatrix} x'_1 \\ x'_2 \\ \vdots \\ x'_n \end{bmatrix} = P \begin{bmatrix} x'_1 \\ x'_2 \\ \vdots \\ x'_n \end{bmatrix}$$

が成り立つとわかる． ■

問題 2. $f\colon \mathbb{R}^n \to \mathbb{R}^m$ を線形写像とし，

- $\mathcal{A} = \{\boldsymbol{a}_1, \boldsymbol{a}_2, \ldots, \boldsymbol{a}_n\}$ と $\mathcal{B} = \{\boldsymbol{b}_1, \boldsymbol{b}_2, \ldots, \boldsymbol{b}_n\}$ を $\mathbb{R}^n$ の 2 組の基底
- $\mathcal{C} = \{\boldsymbol{c}_1, \boldsymbol{c}_2, \ldots, \boldsymbol{c}_m\}$ と $\mathcal{D} = \{\boldsymbol{d}_1, \boldsymbol{d}_2, \ldots, \boldsymbol{d}_m\}$ を $\mathbb{R}^m$ の 2 組の基底,
- F を基底 $\mathcal{A}$ と基底 $\mathcal{C}$ に関する f の表現行列
- G を基底 $\mathcal{B}$ と基底 $\mathcal{D}$ に関する f の表現行列
- P を基底 $\mathcal{A}$ から基底 $\mathcal{B}$ への基底取り替え行列
- Q を基底 $\mathcal{C}$ から基底 $\mathcal{D}$ への基底取り替え行列

とする．このとき

$$G = Q^{-1}FP$$

が成立することを示せ

（Hint：各 $\boldsymbol{x} \in \mathbb{R}^n$ と，$\boldsymbol{y} = f(\boldsymbol{x}) \in \mathbb{R}^m$ に対し，$\boldsymbol{x}$ の $\mathcal{A}$ と $\mathcal{B}$ に関するそれぞれの座標，$\boldsymbol{y}$ の $\mathcal{C}$ と $\mathcal{D}$ に関するそれぞれの座標を考え，これらの関係性に注目せよ.）.

解答. 任意に $\boldsymbol{x} \in \mathbb{R}^n$ をとり，$\boldsymbol{y} = f(\boldsymbol{x}) \in \mathbb{R}^m$ とおく．$\boldsymbol{x}$ の $\mathcal{A} = \{\boldsymbol{a}_1, \boldsymbol{a}_2, \ldots, \boldsymbol{a}_n\}$ と $\mathcal{B} = \{\boldsymbol{b}_1, \boldsymbol{b}_2, \ldots, \boldsymbol{b}_n\}$ に関する座標をそれぞれ

$$\begin{bmatrix} x_1 \\ x_2 \\ \vdots \\ x_n \end{bmatrix}, \quad \begin{bmatrix} x'_1 \\ x'_2 \\ \vdots \\ x'_n \end{bmatrix}$$

とし，$\boldsymbol{y}$ の $\mathcal{C} = \{\boldsymbol{c}_1, \boldsymbol{c}_2, \ldots, \boldsymbol{c}_m\}$ と $\mathcal{D} = \{\boldsymbol{d}_1, \boldsymbol{d}_2, \ldots, \boldsymbol{d}_m\}$ に関する座標をそれぞれ

$$\begin{bmatrix} y_1 \\ y_2 \\ \vdots \\ y_m \end{bmatrix}, \quad \begin{bmatrix} y'_1 \\ y'_2 \\ \vdots \\ y'_m \end{bmatrix}$$

とする．F は基底 $\mathcal{A}$ と基底 $\mathcal{C}$ に関する f の表現行列であったから

$$\begin{bmatrix} y_1 \\ y_2 \\ \vdots \\ y_m \end{bmatrix} = F \begin{bmatrix} x_1 \\ x_2 \\ \vdots \\ x_n \end{bmatrix} \tag{2.3}$$

が成り立つ．同様に G は基底 $\mathcal{B}$ と基底 $\mathcal{D}$ に関する f の表現行列であったから

$$\begin{bmatrix} y'_1 \\ y'_2 \\ \vdots \\ y'_m \end{bmatrix} = G \begin{bmatrix} x'_1 \\ x'_2 \\ \vdots \\ x'_n \end{bmatrix} \tag{2.4}$$

が成り立つ．また，P は $\mathcal{A}$ から $\mathcal{B}$ への基底取り替え行列であったから

$$\begin{bmatrix} x_1 \\ x_2 \\ \vdots \\ x_n \end{bmatrix} = P \begin{bmatrix} x'_1 \\ x'_2 \\ \vdots \\ x'_n \end{bmatrix} \tag{2.5}$$

が成り立ち，同様に Q は $\mathcal{C}$ から $\mathcal{D}$ への基底取り替え行列であったから

$$\begin{bmatrix} y_1 \\ y_2 \\ \vdots \\ y_m \end{bmatrix} = Q \begin{bmatrix} y'_1 \\ y'_2 \\ \vdots \\ y'_m \end{bmatrix} \qquad \text{すなわち} \qquad \begin{bmatrix} y'_1 \\ y'_2 \\ \vdots \\ y'_m \end{bmatrix} = Q^{-1} \begin{bmatrix} y_1 \\ y_2 \\ \vdots \\ y_m \end{bmatrix} \tag{2.6}$$

が成り立つ．(2.3), (2.5), (2.6) より

$$\begin{aligned} \begin{bmatrix} y'_1 \\ y'_2 \\ \vdots \\ y'_m \end{bmatrix} &= Q^{-1} \begin{bmatrix} y_1 \\ y_2 \\ \vdots \\ y_m \end{bmatrix} = Q^{-1}F \begin{bmatrix} x_1 \\ x_2 \\ \vdots \\ x_n \end{bmatrix} \\ &= Q^{-1}FP \begin{bmatrix} x'_1 \\ x'_2 \\ \vdots \\ x'_n \end{bmatrix} \end{aligned}$$

とわかり，(2.4) と合わせて結果としてすべての $\boldsymbol{x} \in \mathbb{R}^n$ に対して

$$G \begin{bmatrix} x'_1 \\ x'_2 \\ \vdots \\ x'_n \end{bmatrix} = Q^{-1}FP \begin{bmatrix} x'_1 \\ x'_2 \\ \vdots \\ x'_n \end{bmatrix} \tag{2.7}$$

が成り立つとわかる．とくに $\boldsymbol{x} = \boldsymbol{c}_1$ のとき，すなわち

$$\begin{bmatrix} x'_1 \\ x'_2 \\ \vdots \\ x'_n \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 1 \\ 0 \\ \vdots \\ 0 \end{bmatrix}$$

のとき，(2.7) より G の第 1 列と $Q^{-1}FP$ の第 1 列が等しいことを得る．同様に $\boldsymbol{x} = \boldsymbol{c}_i$ $(2 \leq i \leq n)$ のとき (2.7) より G の第 i 列と $Q^{-1}FP$ の第 i 列が等しいとわかる．したがって

$$G = Q^{-1}FP$$

を得る． ■

補足　(2.3),(2.4),(2.5),(2.6) の対応を図示すると次のようになる．$G = Q^{-1}FP$ は，(2.4) の対応は，(2.5),(2.3),(2.6) の合成と等しいということである．

$$
\begin{tikzcd}
\begin{pmatrix}\text{基底 } \mathcal{A} = \{\boldsymbol{a}_1, \boldsymbol{a}_2, \ldots, \boldsymbol{a}_n\} \\ \text{に関する } \boldsymbol{x} \text{ の座標，すなわち} \\ \boldsymbol{x} = x_1\boldsymbol{a}_1 + x_2\boldsymbol{a}_2 + \cdots + x_n\boldsymbol{a}_n\end{pmatrix} & \begin{bmatrix} x_1 \\ x_2 \\ \vdots \\ x_n \end{bmatrix} \arrow[r, mapsto, "(2.3)"] & \begin{bmatrix} y_1 \\ y_2 \\ \vdots \\ y_m \end{bmatrix} \arrow[dd, mapsto, bend left, "(2.6)"] & \begin{pmatrix}\text{基底 } \mathcal{C} = \{\boldsymbol{c}_1, \boldsymbol{c}_2, \ldots, \boldsymbol{c}_m\} \\ \text{に関する } \boldsymbol{y} \text{ の座標，すなわち} \\ \boldsymbol{y} = y_1\boldsymbol{c}_1 + y_2\boldsymbol{c}_2 + \cdots + y_m\boldsymbol{c}_m\end{pmatrix} \\
& \mathbb{R}^n \ni \boldsymbol{x} \arrow[r, mapsto, "f"] & \boldsymbol{y} = f(\boldsymbol{x}) \in \mathbb{R}^m & \\
\begin{pmatrix}\text{基底 } \mathcal{B} = \{\boldsymbol{b}_1, \boldsymbol{b}_2, \ldots, \boldsymbol{b}_n\} \\ \text{に関する } \boldsymbol{x} \text{ の座標，すなわち} \\ \boldsymbol{x} = x'_1\boldsymbol{b}_1 + x'_2\boldsymbol{b}_2 + \cdots + x'_n\boldsymbol{b}_n\end{pmatrix} & \begin{bmatrix} x'_1 \\ x'_2 \\ \vdots \\ x'_n \end{bmatrix} \arrow[r, mapsto, "(2.4)"] \arrow[uu, mapsto, bend left, "(2.5)"] & \begin{bmatrix} y'_1 \\ y'_2 \\ \vdots \\ y'_m \end{bmatrix} & \begin{pmatrix}\text{基底 } \mathcal{D} = \{\boldsymbol{d}_1, \boldsymbol{d}_2, \ldots, \boldsymbol{d}_m\} \\ \text{に関する } \boldsymbol{y} \text{ の座標，すなわち} \\ \boldsymbol{y} = y'_1\boldsymbol{d}_1 + y'_2\boldsymbol{d}_2 + \cdots + y'_m\boldsymbol{d}_m\end{pmatrix}
\end{tikzcd}
$$