線形写像の表現行列　演習問題２　解答例

本演習問題における基底に関する座標，線形写像の表現行列は，次の意味で用いる[*1]．

- $\mathcal{S}=\{\boldsymbol{e}_1,\boldsymbol{e}_2,\ldots,\boldsymbol{e}_n\}$ を $\mathbb{R}^n$ の標準基底，すなわち

$$\boldsymbol{e}_1=\begin{bmatrix}1\\0\\\vdots\\0\end{bmatrix},\quad \boldsymbol{e}_2=\begin{bmatrix}0\\1\\0\\\vdots\\0\end{bmatrix},\quad \ldots,\quad \boldsymbol{e}_n=\begin{bmatrix}0\\\vdots\\0\\1\end{bmatrix}\in\mathbb{R}^n$$

とする．多くの場合我々は，$\mathbb{R}^n$ に属すベクトル $\boldsymbol{x}$ を

$$\boldsymbol{x}=\begin{bmatrix}x_1\\x_2\\\vdots\\x_n\end{bmatrix}=x_1\begin{bmatrix}1\\0\\\vdots\\0\end{bmatrix}+x_2\begin{bmatrix}0\\1\\0\\\vdots\\0\end{bmatrix}+\cdots+x_n\begin{bmatrix}0\\\vdots\\0\\1\end{bmatrix}=x_1\boldsymbol{e}_1+x_2\boldsymbol{e}_2+\cdots+x_n\boldsymbol{e}_n,$$

すなわち「$\boldsymbol{x}$ は $\boldsymbol{e}_1$ を x_1 倍，$\boldsymbol{e}_2$ を x_2 倍，…，$\boldsymbol{e}_n$ を x_n 倍したベクトルの和である，そして $\boldsymbol{x}$ は始点を原点としたとき，終点の座標が $(x_1,x_2,\ldots,x_n)$ のベクトルである」というように，標準基底 $\mathcal{S}$ を“基準のベクトルの組”として $\mathbb{R}^n$ を考えている．もっと一般に $\mathcal{A}=\{\boldsymbol{a}_1,\boldsymbol{a}_2,\ldots,\boldsymbol{a}_n\}$ を標準基底 $\mathcal{S}$ とは限らない $\mathbb{R}^n$ の 1 組の基底とすると，各 $\boldsymbol{x}\in\mathbb{R}^n$ に対し，$\boldsymbol{x}$ は

$$\boldsymbol{x}=c_1\boldsymbol{a}_1+c_2\boldsymbol{a}_2+\cdots+c_n\boldsymbol{a}_n$$

と一意的に $\boldsymbol{a}_1,\boldsymbol{a}_2,\ldots,\boldsymbol{a}_n$ の 1 次結合で表せる．このとき

$$\begin{bmatrix}c_1\\c_2\\\vdots\\c_n\end{bmatrix}$$

を基底 $\mathcal{A}$ に関する $\boldsymbol{x}$ の**座標**という．粗っぽく言えば $\mathcal{A}=\{\boldsymbol{a}_1,\boldsymbol{a}_2,\ldots,\boldsymbol{a}_n\}$ を“基準のベクトルの組”として $\mathbb{R}^n$ を考えたとき（すなわち標準基底 $\mathcal{S}$ の替わりに各座標軸の向きと単位長さを $\{\boldsymbol{a}_1,\boldsymbol{a}_2,\ldots,\boldsymbol{a}_n\}$ の向きと大きさにして $\mathbb{R}^n$ の座標系を考えたとき），$\boldsymbol{x}\in\mathbb{R}^n$ は始点を原点とすれば，終点の座標が $(c_1,c_2,\ldots,c_n)$ のベクトルに思えるということである．

- $f\colon\mathbb{R}^n\to\mathbb{R}^m$ を線形写像とし，$\mathcal{A}=\{\boldsymbol{a}_1,\boldsymbol{a}_2,\ldots,\boldsymbol{a}_n\}$ と $\mathcal{B}=\{\boldsymbol{b}_1,\boldsymbol{b}_2,\ldots,\boldsymbol{b}_m\}$ をそれぞれ $\mathbb{R}^n$ と $\mathbb{R}^m$ の 1 組の基底とすると，$f(\boldsymbol{a}_1),f(\boldsymbol{a}_2),\ldots,f(\boldsymbol{a}_n)\in\mathbb{R}^m$ は $\mathcal{B}=\{\boldsymbol{b}_1,\boldsymbol{b}_2,\ldots,\boldsymbol{b}_m\}$ が $\mathbb{R}^m$ の基底であるから

$$\begin{cases}f(\boldsymbol{a}_1)=f_{11}\boldsymbol{b}_1+f_{21}\boldsymbol{b}_2+\cdots+f_{m1}\boldsymbol{b}_m\\ f(\boldsymbol{a}_2)=f_{12}\boldsymbol{b}_1+f_{22}\boldsymbol{b}_2+\cdots+f_{m2}\boldsymbol{b}_m\\ \qquad\vdots\\ f(\boldsymbol{a}_n)=f_{1n}\boldsymbol{b}_1+f_{2n}\boldsymbol{b}_2+\cdots+f_{mn}\boldsymbol{b}_m\end{cases}\tag{2.1}$$

[*1] 定義や記号の使い方は，「村上正康・佐藤恒雄・野澤宗平・稲葉尚志 共著，教養の線形代数 六訂版，培風館」を参考にしている．

と一意的に表せる．このとき $m \times n$ 行列

$$F = \begin{bmatrix} f_{11} & f_{12} & \cdots & f_{1n} \\ f_{21} & f_{22} & \cdots & f_{2n} \\ \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ f_{m1} & f_{m2} & \cdots & f_{mn} \end{bmatrix}$$

を基底 $\mathcal{A}$ と基底 $\mathcal{B}$ に関する f の**表現行列**という．つまり，各 j 列に $f(\boldsymbol{a}_j)$ の $\mathcal{B}$ に関する座標を並べて得られる行列である．実は $\mathbb{R}^n$ を基底 $\mathcal{A}$，$\mathbb{R}^m$ を基底 $\mathcal{B}$ を用いて考えたときに，線形写像 f は各ベクトルに左から F を掛ける操作に見えている（後の問題を参照）．とくに $n = m$ の場合，線形写像 $f \colon \mathbb{R}^n \to \mathbb{R}^n$ の基底 $\mathcal{A}$ と基底 $\mathcal{A}$ に関する表現行列を，単に基底 $\mathcal{A}$ に関する表現行列ということもある．また，連立した式 (2.1) は行列を使って

$$[f(\boldsymbol{a}_1), f(\boldsymbol{a}_2), \ldots, f(\boldsymbol{a}_n)] = [\boldsymbol{b}_1, \boldsymbol{b}_2, \ldots, \boldsymbol{b}_m]F$$

と表せることに注意せよ．$\mathcal{B} = \{\boldsymbol{b}_1, \boldsymbol{b}_2, \ldots, \boldsymbol{b}_m\}$ は $\mathbb{R}^m$ の基底であり，とくに 1 次独立な $\mathbb{R}^m$ に属す m 個のベクトルの組であるから，$[\boldsymbol{b}_1, \boldsymbol{b}_2, \ldots, \boldsymbol{b}_m]$ は正則になることに注意すると，基底 $\mathcal{A}$ と基底 $\mathcal{B}$ に関する f の表現行列は

$$F = [\boldsymbol{b}_1, \boldsymbol{b}_2, \ldots, \boldsymbol{b}_m]^{-1}[f(\boldsymbol{a}_1), f(\boldsymbol{a}_2), \ldots, f(\boldsymbol{a}_n)] \tag{2.2}$$

で定まる $m \times n$ 行列であると言い換えることもできる．

以上を踏まえた上で，次の問に答えよ．

問題 1. $f \colon \mathbb{R}^n \to \mathbb{R}^m$ を線形写像とし，以下の問に答えよ．

(i) $A = [f(\boldsymbol{e}_1), f(\boldsymbol{e}_2), \ldots, f(\boldsymbol{e}_n)]$ とおけば，任意の $\boldsymbol{x} \in \mathbb{R}^n$ に対して

$$f(\boldsymbol{x}) = A\boldsymbol{x}$$

と表せることを示せ（つまり線形写像は必ず行列を左から掛ける形で表せる）．

解答． 任意の

$$\boldsymbol{x} = \begin{bmatrix} x_1 \\ x_2 \\ \vdots \\ x_n \end{bmatrix} \in \mathbb{R}^n$$

をとる．このとき $\boldsymbol{x} = x_1\boldsymbol{e}_1 + x_2\boldsymbol{e}_2 + \cdots + x_n\boldsymbol{e}_n$ と表せることと f の線形性より

$$\begin{aligned} f(\boldsymbol{x}) &= f(x_1\boldsymbol{e}_1 + x_2\boldsymbol{e}_2 + \cdots + x_n\boldsymbol{e}_n) \\ &= x_1 f(\boldsymbol{e}_1) + x_2 f(\boldsymbol{e}_2) + \cdots + x_n f(\boldsymbol{e}_n) \\ &= [f(\boldsymbol{e}_1), f(\boldsymbol{e}_2), \ldots, f(\boldsymbol{e}_n)] \begin{bmatrix} x_1 \\ x_2 \\ \vdots \\ x_n \end{bmatrix} \\ &= A\boldsymbol{x} \end{aligned}$$

と表せることがわかる． ■

(ii) いま $\mathcal{S}' = \{\boldsymbol{e}'_1, \boldsymbol{e}'_2, \ldots, \boldsymbol{e}'_m\}$ を $\mathbb{R}^m$ の標準基底とする．線形写像 f の標準基底 $\mathcal{S} = \{\boldsymbol{e}_1, \boldsymbol{e}_2, \ldots, \boldsymbol{e}_n\}$ と標準基底 $\mathcal{S}' = \{\boldsymbol{e}'_1, \boldsymbol{e}'_2, \ldots, \boldsymbol{e}'_m\}$ に関する表現行列は A と等しいことを示せ．

解答． I_m を m 次単位行列とする．基底 $\mathcal{S}$ と基底 $\mathcal{S}'$ に関する f の表現行列を F とすると，$[\boldsymbol{e}'_1, \boldsymbol{e}'_2, \ldots, \boldsymbol{e}'_m]^{-1} = I_m^{-1} = I_m$ が成り立つことと (2.2) に注意して

$$F = [\boldsymbol{e}'_1, \boldsymbol{e}'_2, \ldots, \boldsymbol{e}'_m]^{-1}[f(\boldsymbol{e}_1), f(\boldsymbol{e}_2), \ldots, f(\boldsymbol{e}_n)] = I_m A = A$$

とわかる． ■

問題 2． $f\colon \mathbb{R}^n \to \mathbb{R}^m$ を線形写像とし，$\mathcal{A} = \{\boldsymbol{a}_1, \boldsymbol{a}_2, \ldots, \boldsymbol{a}_n\}$ を $\mathbb{R}^n$ の 1 組の基底，$\mathcal{B} = \{\boldsymbol{b}_1, \boldsymbol{b}_2, \ldots, \boldsymbol{b}_m\}$ を $\mathbb{R}^m$ の 1 組の基底とする．また，$\mathcal{A}$ と $\mathcal{B}$ に関する f の表現行列を F とする．いま，$\boldsymbol{x} \in \mathbb{R}^n$ に対し，$\boldsymbol{y} = f(\boldsymbol{x}) \in \mathbb{R}^m$ とおき，$\boldsymbol{x}$ の $\mathcal{A}$ に関する座標，$\boldsymbol{y}$ の $\mathcal{B}$ に関する座標をそれぞれ

$$\begin{bmatrix} x_1 \\ x_2 \\ \vdots \\ x_n \end{bmatrix}, \quad \begin{bmatrix} y_1 \\ y_2 \\ \vdots \\ y_m \end{bmatrix}$$

とする．このとき

$$\begin{bmatrix} y_1 \\ y_2 \\ \vdots \\ y_m \end{bmatrix} = F \begin{bmatrix} x_1 \\ x_2 \\ \vdots \\ x_n \end{bmatrix}$$

が成立することを示せ（つまり，$\mathbb{R}^n$ を基底 $\mathcal{A}$，$\mathbb{R}^m$ を基底 $\mathcal{B}$ を用いて考えたときに，線形写像 $f\colon \mathbb{R}^n \to \mathbb{R}^m$ は各ベクトルに左から F を掛ける操作に見えている）．

解答． 表現行列の定義から

$$[f(\boldsymbol{a}_1), f(\boldsymbol{a}_2), \ldots, f(\boldsymbol{a}_n)] = [\boldsymbol{b}_1, \boldsymbol{b}_2, \ldots, \boldsymbol{b}_m]F$$

となる．また，$\boldsymbol{x}$ の基底 $\mathcal{A} = \{\boldsymbol{a}_1, \boldsymbol{a}_2, \ldots, \boldsymbol{a}_n\}$ に関する座標が

$$\begin{bmatrix} x_1 \\ x_2 \\ \vdots \\ x_n \end{bmatrix}$$

であるということは，

$$\boldsymbol{x} = x_1\boldsymbol{a}_1 + x_2\boldsymbol{a}_2 + \cdots + x_n\boldsymbol{a}_n$$

ということである．よって f の線形性より

$$
\begin{aligned}
\boldsymbol{y} &= f(\boldsymbol{x}) = f(x_1\boldsymbol{a}_1 + x_2\boldsymbol{a}_2 + \cdots + x_n\boldsymbol{a}_n) \\
&= x_1 f(\boldsymbol{a}_1) + x_2 f(\boldsymbol{a}_2) + \cdots + x_n f(\boldsymbol{a}_n) \\
&= [f(\boldsymbol{a}_1), f\boldsymbol{a}_2, \ldots, f(\boldsymbol{a}_n)] \begin{bmatrix} x_1 \\ x_2 \\ \vdots \\ x_n \end{bmatrix} \\
&= [\boldsymbol{b}_1, \boldsymbol{b}_2, \ldots, \boldsymbol{b}_m] F \begin{bmatrix} x_1 \\ x_2 \\ \vdots \\ x_n \end{bmatrix}
\end{aligned} \tag{2.3}
$$

と表せる．一方，$\boldsymbol{y}$ の $\mathcal{B}$ に関する座標が

$$
\begin{bmatrix} y_1 \\ y_2 \\ \vdots \\ y_m \end{bmatrix}
$$

ということから

$$
\boldsymbol{y} = y_1\boldsymbol{b}_1 + y_2\boldsymbol{b}_2 + \cdots + y_m\boldsymbol{b}_m = [\boldsymbol{b}_1, \boldsymbol{b}_2, \ldots, \boldsymbol{b}_m] \begin{bmatrix} y_1 \\ y_2 \\ \vdots \\ y_m \end{bmatrix} \tag{2.4}
$$

とも表せる．(2.3) と (2.4) より

$$
[\boldsymbol{b}_1, \boldsymbol{b}_2, \ldots, \boldsymbol{b}_m] \begin{bmatrix} y_1 \\ y_2 \\ \vdots \\ y_m \end{bmatrix} = [\boldsymbol{b}_1, \boldsymbol{b}_2, \ldots, \boldsymbol{b}_m] F \begin{bmatrix} x_1 \\ x_2 \\ \vdots \\ x_n \end{bmatrix}.
$$

両辺に左から $[\boldsymbol{b}_1, \boldsymbol{b}_2, \ldots, \boldsymbol{b}_m]^{-1}$ を掛けて

$$
\begin{bmatrix} y_1 \\ y_2 \\ \vdots \\ y_m \end{bmatrix} = F \begin{bmatrix} x_1 \\ x_2 \\ \vdots \\ x_n \end{bmatrix}
$$

を得る． ■

問題 3. 線形写像

$$
f \colon \mathbb{R}^2 \to \mathbb{R}^2, \quad f(\boldsymbol{x}) = \begin{bmatrix} -1 & 0 \\ 0 & 1 \end{bmatrix} \boldsymbol{x} \quad (\boldsymbol{x} \in \mathbb{R}^2)
$$

の基底 $\left\{ \boldsymbol{e}_2 = \begin{bmatrix} 0 \\ 1 \end{bmatrix}, -\boldsymbol{e}_1 = \begin{bmatrix} -1 \\ 0 \end{bmatrix} \right\}$ に関する表現行列を求めよ．

解答.

$$f(\boldsymbol{e}_2) = \begin{bmatrix} -1 & 0 \\ 0 & 1 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} 0 \\ 1 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 0 \\ 1 \end{bmatrix} = \boldsymbol{e}_2 = 1\boldsymbol{e}_2 + 0(-\boldsymbol{e}_1)$$

$$f(-\boldsymbol{e}_1) = \begin{bmatrix} -1 & 0 \\ 0 & 1 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} -1 \\ 0 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 1 \\ 0 \end{bmatrix} = \boldsymbol{e}_1 = 0\boldsymbol{e}_2 + (-1)(-\boldsymbol{e}_1)$$

であるから（(2.1) に対応する式），表現行列は

$$\begin{bmatrix} 1 & 0 \\ 0 & -1 \end{bmatrix}$$

となる．もしくは (2.2) に注意して

$$[\boldsymbol{e}_2, -\boldsymbol{e}_1]^{-1}[f(\boldsymbol{e}_2), f(-\boldsymbol{e}_1)] = \begin{bmatrix} 0 & -1 \\ 1 & 0 \end{bmatrix}^{-1} \begin{bmatrix} 0 & 1 \\ 1 & 0 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 0 & 1 \\ -1 & 0 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} 0 & 1 \\ 1 & 0 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 1 & 0 \\ 0 & -1 \end{bmatrix}$$

と求められる． ■

補足

$$f\left(\begin{bmatrix} x \\ y \end{bmatrix}\right) = \begin{bmatrix} -x \\ y \end{bmatrix}$$

であるから，$\boldsymbol{x} = \begin{bmatrix} x \\ y \end{bmatrix} \in \mathbb{R}^2$ を平面上の点 (x, y) と同一視すると，線形写像 f は各 (x, y) を $(-x, y)$ へ写す写像，すなわち y 軸に関する対称移動に対応する写像である．この写像 f に対して，$\mathbb{R}^2$ を基底 $\{\boldsymbol{e}_2, -\boldsymbol{e}_1\}$ を用いて考える，言い換えれば標準基底 $\{\boldsymbol{e}_1, \boldsymbol{e}_2\}$ を反時計回りに $90°$ 回転させた基底で考えると，左から $\begin{bmatrix} 1 & 0 \\ 0 & -1 \end{bmatrix}$ を掛ける操作，つまり

$$\begin{bmatrix} 1 & 0 \\ 0 & -1 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} x \\ y \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} x \\ -y \end{bmatrix} \quad ((x, y) \text{ を } (x, -y) \text{ に写す})$$

という x 軸に関する対称移動に見えるということである．