線形写像の表現行列　演習問題１　解答

問 1. 線形写像 $f\colon \mathbb{R}^3 \to \mathbb{R}^2$, $f\left(\begin{bmatrix} x \\ y \\ z \end{bmatrix}\right) = \begin{bmatrix} 2 & 3 & -1 \\ -1 & 1 & 4 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} x \\ y \\ z \end{bmatrix}$ について，以下の問に答えよ．

(i) $\mathbb{R}^3$ の標準基底と $\mathbb{R}^2$ の標準基底に関する f の表現行列を答えよ．

解答. $\mathbb{R}^3$ の標準基底と $\mathbb{R}^2$ の標準基底をそれぞれ

$$\left\{ \boldsymbol{e}_1 = \begin{bmatrix} 1 \\ 0 \\ 0 \end{bmatrix}, \boldsymbol{e}_2 = \begin{bmatrix} 0 \\ 1 \\ 0 \end{bmatrix}, \boldsymbol{e}_3 = \begin{bmatrix} 0 \\ 0 \\ 1 \end{bmatrix} \right\}, \quad \left\{ \boldsymbol{e}'_1 = \begin{bmatrix} 1 \\ 0 \end{bmatrix}, \boldsymbol{e}'_2 = \begin{bmatrix} 0 \\ 1 \end{bmatrix} \right\}$$

とする．

$$f(\boldsymbol{e}_1) = \begin{bmatrix} 2 & 3 & -1 \\ -1 & 1 & 4 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} 1 \\ 0 \\ 0 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 2 \\ -1 \end{bmatrix} = 2 \begin{bmatrix} 1 \\ 0 \end{bmatrix} + (-1) \begin{bmatrix} 0 \\ 1 \end{bmatrix} = 2\boldsymbol{e}'_1 + (-1)\boldsymbol{e}'_2,$$

$$f(\boldsymbol{e}_2) = \begin{bmatrix} 2 & 3 & -1 \\ -1 & 1 & 4 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} 0 \\ 1 \\ 0 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 3 \\ 1 \end{bmatrix} = 3 \begin{bmatrix} 1 \\ 0 \end{bmatrix} + 1 \cdot \begin{bmatrix} 0 \\ 1 \end{bmatrix} = 3\boldsymbol{e}'_1 + 1 \cdot \boldsymbol{e}'_2,$$

$$f(\boldsymbol{e}_3) = \begin{bmatrix} 2 & 3 & -1 \\ -1 & 1 & 4 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} 0 \\ 0 \\ 1 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} -1 \\ 4 \end{bmatrix} = (-1) \begin{bmatrix} 1 \\ 0 \end{bmatrix} + 4 \begin{bmatrix} 0 \\ 1 \end{bmatrix} = (-1)\boldsymbol{e}'_1 + 4\boldsymbol{e}'_2$$

となるから，表現行列は $\begin{bmatrix} 2 & 3 & -1 \\ -1 & 1 & 4 \end{bmatrix}$. ■

(ii) $\mathbb{R}^3$ の基底 $\mathcal{A} = \left\{ \boldsymbol{a}_1 = \begin{bmatrix} 1 \\ 0 \\ 0 \end{bmatrix}, \boldsymbol{a}_2 = \begin{bmatrix} 1 \\ 1 \\ 0 \end{bmatrix}, \boldsymbol{a}_3 = \begin{bmatrix} 1 \\ 1 \\ 1 \end{bmatrix} \right\}$ と $\mathbb{R}^2$ の基底 $\mathcal{B} = \left\{ \boldsymbol{b}_1 = \begin{bmatrix} 1 \\ 1 \end{bmatrix}, \boldsymbol{b}_2 = \begin{bmatrix} 1 \\ -1 \end{bmatrix} \right\}$ に関する f の表現行列 F を

$$F = \begin{bmatrix} f_{11} & f_{12} & f_{13} \\ f_{21} & f_{22} & f_{23} \end{bmatrix}$$

とおく．$f(\boldsymbol{a}_1)$, $f(\boldsymbol{a}_2)$, $f(\boldsymbol{a}_3)$ をそれぞれ $\boldsymbol{b}_1$, $\boldsymbol{b}_2$, f_{ij} $(1 \leq i \leq 2, 1 \leq j \leq 3)$ を用いて表わせ（表現行列の定義を確認せよ）.

解答. 表現行列の定義より，$f(\boldsymbol{a}_1) = f_{11}\boldsymbol{b}_1 + f_{21}\boldsymbol{b}_2$, $f(\boldsymbol{a}_2) = f_{12}\boldsymbol{b}_1 + f_{22}\boldsymbol{b}_2$, $f(\boldsymbol{a}_3) = f_{13}\boldsymbol{b}_1 + f_{23}\boldsymbol{b}_2$. ■

(iii) 5 つの 2 次元ベクトル $\boldsymbol{b}_1$, $\boldsymbol{b}_2$, $f(\boldsymbol{a}_1)$, $f(\boldsymbol{a}_2)$, $f(\boldsymbol{a}_3)$ を各列に並べて得られる 2×5 行列 $[\boldsymbol{b}_1, \boldsymbol{b}_2, f(\boldsymbol{a}_1), f(\boldsymbol{a}_2), f(\boldsymbol{a}_3)]$ に行基本変形を何回か施して得られる階段行列を

$$= \begin{bmatrix} 1 & 0 & f'_{11} & f'_{12} & f'_{13} \\ 0 & 1 & f'_{21} & f'_{22} & f'_{23} \end{bmatrix}$$

とおくとき，すべての i, j $(1 \leq i \leq 2, 1 \leq j \leq 3)$ について $f_{ij} = f'_{ij}$ であることを確認せよ．

解答.

$$[\boldsymbol{b}_1, \boldsymbol{b}_2, f(\boldsymbol{a}_1), f(\boldsymbol{a}_2), f(\boldsymbol{a}_3)] = \begin{bmatrix} 1 & 1 & 2 & 5 & 4 \\ 1 & -1 & -1 & 0 & 4 \end{bmatrix} \to \cdots \to \begin{bmatrix} 1 & 0 & 1/2 & 5/2 & 4 \\ 0 & 1 & 3/2 & 5/2 & 0 \end{bmatrix}$$

と変形でき，確かに

$$\begin{aligned} f(\boldsymbol{a}_1) &= \begin{bmatrix} 2 & 3 & -1 \\ -1 & 1 & 4 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} 1 \\ 0 \\ 0 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 2 \\ -1 \end{bmatrix} = \frac{1}{2} \begin{bmatrix} 1 \\ 1 \end{bmatrix} + \frac{3}{2} \begin{bmatrix} 1 \\ -1 \end{bmatrix} = \frac{1}{2}\boldsymbol{b}_1 + \frac{3}{2}\boldsymbol{b}_2, \\ f(\boldsymbol{a}_2) &= \begin{bmatrix} 2 & 3 & -1 \\ -1 & 1 & 4 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} 1 \\ 1 \\ 0 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 5 \\ 0 \end{bmatrix} = \frac{5}{2} \begin{bmatrix} 1 \\ 1 \end{bmatrix} + \frac{5}{2} \begin{bmatrix} 1 \\ -1 \end{bmatrix} = \frac{5}{2}\boldsymbol{b}_1 + \frac{5}{2}\boldsymbol{b}_2, \\ f(\boldsymbol{a}_3) &= \begin{bmatrix} 2 & 3 & -1 \\ -1 & 1 & 4 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} 1 \\ 1 \\ 1 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 4 \\ 4 \end{bmatrix} = 4 \begin{bmatrix} 1 \\ 1 \end{bmatrix} + 0 \begin{bmatrix} 1 \\ -1 \end{bmatrix} = 4\boldsymbol{b}_1 + 0\boldsymbol{b}_2, \end{aligned}$$

が成立する． ■

問 2. $\mathbb{R}^2$ の 2 組の基底 $\mathcal{A} = \left\{ \boldsymbol{a}_1 = \begin{bmatrix} 1 \\ 1 \end{bmatrix}, \boldsymbol{a}_2 = \begin{bmatrix} 1 \\ -1 \end{bmatrix} \right\}$ と $\mathcal{B} = \left\{ \boldsymbol{b}_1 = \begin{bmatrix} 2 \\ 1 \end{bmatrix}, \boldsymbol{b}_2 = \begin{bmatrix} 1 \\ 2 \end{bmatrix} \right\}$ について，以下の問に答えよ．

(i) $\mathcal{A}$ から $\mathcal{B}$ への基底取り替え行列を

$$P = \begin{bmatrix} p_{11} & p_{12} \\ p_{21} & p_{22} \end{bmatrix}$$

とおく．$\boldsymbol{b}_1$, $\boldsymbol{b}_2$ をそれぞれ $\boldsymbol{a}_1$, $\boldsymbol{a}_2$, p_{ij} $(1 \leq i, j \leq 2)$ を用いて表わせ（基底取り替え行列の定義を確認せよ）．

解答. 基底取り替え行列の定義より，$\boldsymbol{b}_1 = p_{11}\boldsymbol{a}_1 + p_{21}\boldsymbol{a}_2$, $\boldsymbol{b}_2 = p_{12}\boldsymbol{a}_1 + p_{22}\boldsymbol{a}_2$. ■

(ii) 4 つの 2 次元ベクトル $\boldsymbol{a}_1$, $\boldsymbol{a}_2$, $\boldsymbol{b}_1$, $\boldsymbol{b}_2$ を各列に並べて得られる 2×4 行列 $[\boldsymbol{a}_1, \boldsymbol{a}_2, \boldsymbol{b}_1, \boldsymbol{b}_2]$ に行基本変形を何回か施して得られる階段行列を

$$= \begin{bmatrix} 1 & 0 & p'_{11} & p'_{12} \\ 0 & 1 & p'_{21} & p'_{22} \end{bmatrix}$$

とおくとき，すべての i, j $(1 \leq i, j \leq 2)$ について $p_{ij} = p'_{ij}$ であることを確認せよ．

解答.

$$[\boldsymbol{a}_1, \boldsymbol{a}_2, \boldsymbol{b}_1, \boldsymbol{b}_2] = \begin{bmatrix} 1 & 1 & 2 & 1 \\ 1 & -1 & 1 & 2 \end{bmatrix} \to \cdots \to \begin{bmatrix} 1 & 0 & 3/2 & 3/2 \\ 0 & 1 & 1/2 & -1/2 \end{bmatrix}$$

と変形でき，確かに

$$\begin{aligned} \boldsymbol{b}_1 &= \begin{bmatrix} 2 \\ 1 \end{bmatrix} = \frac{3}{2} \begin{bmatrix} 1 \\ 1 \end{bmatrix} + \frac{1}{2} \begin{bmatrix} 1 \\ -1 \end{bmatrix} = \frac{3}{2}\boldsymbol{a}_1 + \frac{1}{2}\boldsymbol{a}_2, \\ \boldsymbol{b}_2 &= \begin{bmatrix} 1 \\ 2 \end{bmatrix} = \frac{3}{2} \begin{bmatrix} 1 \\ 1 \end{bmatrix} + \left(-\frac{1}{2}\right) \begin{bmatrix} 1 \\ -1 \end{bmatrix} = \frac{3}{2}\boldsymbol{a}_1 + \left(-\frac{1}{2}\right)\boldsymbol{a}_2 \end{aligned}$$

が成立する． ■

注意. 線形写像 $f\colon \mathbb{R}^n \to \mathbb{R}^m$ の $\mathbb{R}^n$ の基底 $\mathcal{A} = \{\boldsymbol{a}_1, \boldsymbol{a}_2, \dots, \boldsymbol{a}_n\}$ と $\mathbb{R}^m$ の基底 $\mathcal{B} = \{\boldsymbol{b}_1, \boldsymbol{b}_2, \dots, \boldsymbol{b}_m\}$ に関する表現行列 F とすると，任意の $\boldsymbol{x} \in \mathbb{R}^n$ に対して

$$\boldsymbol{x} = a_1\boldsymbol{a}_1 + a_2\boldsymbol{a}_2 + \cdots a_n\boldsymbol{a}_n, \quad f(\boldsymbol{x}) = b_1\boldsymbol{b}_1 + b_2\boldsymbol{b}_2 + \cdots b_m\boldsymbol{b}_m$$

と表されるとき，

$$\begin{bmatrix} b_1 \\ b_2 \\ \vdots \\ b_m \end{bmatrix} = F \begin{bmatrix} a_1 \\ a_2 \\ \vdots \\ a_n \end{bmatrix}$$

が成立することがわかる．すなわち $\mathbb{R}^n$ の各ベクトルを基底 $\mathcal{A}$，$\mathbb{R}^m$ の各ベクトルを基底 $\mathcal{B}$ を用いて考える立場のとき，線形写像 f は行列 F を左から掛ける操作に見えているということである．

本演習問題のように線形写像 $f\colon \mathbb{R}^n \to \mathbb{R}^m$ の $\mathbb{R}^n$ の基底 $\mathcal{A} = \{\boldsymbol{a}_1, \boldsymbol{a}_2, \dots, \boldsymbol{a}_n\}$ と $\mathbb{R}^m$ の基底 $\mathcal{B} = \{\boldsymbol{b}_1, \boldsymbol{b}_2, \dots, \boldsymbol{b}_m\}$ に関する表現行列 F は，$[\boldsymbol{b}_1, \boldsymbol{b}_2, \dots, \boldsymbol{b}_m | f(\boldsymbol{a}_1), f(\boldsymbol{a}_2), \dots, f(\boldsymbol{a}_n)]$ を行基本変形して階段行列にした際の右側の $m \times n$ 行列と一致する，すなわち階段行列へ変形した結果は $[\ m$ 次単位行列 $|\ F\ ]$ の形になることがわかる．同様のアイデアで，$\mathbb{R}^n$ の 2 組の $\mathcal{A} = \{\boldsymbol{a}_1, \boldsymbol{a}_2, \dots, \boldsymbol{a}_n\}$ と $\mathcal{B} = \{\boldsymbol{b}_1, \boldsymbol{b}_2, \dots, \boldsymbol{b}_n\}$ に対し，$\mathcal{A}$ から $\mathcal{B}$ への基底取り替え行列 P は，$[\boldsymbol{a}_1, \boldsymbol{a}_2, \dots, \boldsymbol{a}_n | \boldsymbol{b}_1, \boldsymbol{b}_2, \dots, \boldsymbol{b}_n]$ に行基本変形を数回行った結果得られる階段行列 $[\ n$ 次単位行列 $|\ P\ ]$ の右側の n 次正方行列（実際は正則行列）と一致する．その理由を以下に示そう．基底取り替え行列は，線形変換 $\mathrm{id}\colon \mathbb{R}^n \to \mathbb{R}^n$ の基底 $\mathcal{B}$ と基底 $\mathcal{A}$ に関する表現行列の話に帰着されるので，一般の表現行列の方だけ示す．いま，線形写像 $f\colon \mathbb{R}^n \to \mathbb{R}^m$ と $\mathbb{R}^n$ の基底 $\mathcal{A} = \{\boldsymbol{a}_1, \boldsymbol{a}_2, \dots, \boldsymbol{a}_n\}$ と $\mathbb{R}^m$ の基底 $\mathcal{B} = \{\boldsymbol{b}_1, \boldsymbol{b}_2, \dots, \boldsymbol{b}_m\}$ が与えられているとし，$\mathcal{A}$ と $\mathcal{B}$ に関する f の表現行列を F とする．表現行列の定義から

$$\begin{cases} f(\boldsymbol{a}_1) = f_{11}\boldsymbol{b}_1 + f_{21}\boldsymbol{b}_2 + \cdots + f_{m1}\boldsymbol{b}_m \\ f(\boldsymbol{a}_2) = f_{12}\boldsymbol{b}_1 + f_{22}\boldsymbol{b}_2 + \cdots + f_{m2}\boldsymbol{b}_m \\ \qquad\qquad\vdots \\ f(\boldsymbol{a}_n) = f_{1n}\boldsymbol{b}_1 + f_{2n}\boldsymbol{b}_2 + \cdots + f_{mn}\boldsymbol{b}_m \end{cases}, F = \begin{bmatrix} f_{11} & f_{12} & \cdots & f_{1n} \\ f_{21} & f_{22} & \cdots & f_{2n} \\ \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ f_{m1} & f_{m2} & \cdots & f_{mn} \end{bmatrix}$$

であるが，前者の連立式を行列を用いて表すと

$$[f(\boldsymbol{a}_1), f(\boldsymbol{a}_2), \dots, f(\boldsymbol{a}_n)] = [\boldsymbol{b}_1, \boldsymbol{b}_2, \dots, \boldsymbol{b}_m]F$$

となる．$\mathcal{B}$ は基底であるから $[\boldsymbol{b}_1, \boldsymbol{b}_2, \dots, \boldsymbol{b}_m]$ は正則となることに注意すると

$$F = [\boldsymbol{b}_1, \boldsymbol{b}_2, \dots, \boldsymbol{b}_m]^{-1}[f(\boldsymbol{a}_1), f(\boldsymbol{a}_2), \dots, f(\boldsymbol{a}_n)] \tag{0.1}$$

が成り立つ．

一方，行列に行基本変形を行うことは，基本行列を左から掛ける操作に対応していたことを思い出そう．行列 $[\boldsymbol{b}_1, \boldsymbol{b}_2, \dots, \boldsymbol{b}_m | f(\boldsymbol{a}_1), f(\boldsymbol{a}_2), \dots, f(\boldsymbol{a}_n)]$ を行基本変形して階段行列へと変形することは，ある正則行列 Q を左から掛けて

$$Q[\boldsymbol{b}_1, \boldsymbol{b}_2, \dots, \boldsymbol{b}_m | f(\boldsymbol{a}_1), f(\boldsymbol{a}_2), \dots, f(\boldsymbol{a}_n)] = [Q[\boldsymbol{b}_1, \boldsymbol{b}_2, \dots, \boldsymbol{b}_m]\,|\,Q[f(\boldsymbol{a}_1), f(\boldsymbol{a}_2), \dots, f(\boldsymbol{a}_n)]]$$

と変形して階段行列を得ることに他ならない．再び $\mathcal{B}$ が基底であることから $Q[\boldsymbol{b}_1, \boldsymbol{b}_2, \ldots, \boldsymbol{b}_m]$ は必ず m 次単位行列になり，結果として $Q = [\boldsymbol{b}_1, \boldsymbol{b}_2, \ldots, \boldsymbol{b}_m]^{-1}$ を得る．よって

$$[\boldsymbol{b}_1, \boldsymbol{b}_2, \ldots, \boldsymbol{b}_m | f(\boldsymbol{a}_1), f(\boldsymbol{a}_2), \ldots, f(\boldsymbol{a}_n)]$$

に行基本変形を行って階段行列にした結果の右側の $m \times n$ 行列は

$$Q[f(\boldsymbol{a}_1), f(\boldsymbol{a}_2), \ldots, f(\boldsymbol{a}_n)] = [\boldsymbol{b}_1, \boldsymbol{b}_2, \ldots, \boldsymbol{b}_m]^{-1}[f(\boldsymbol{a}_1), f(\boldsymbol{a}_2), \ldots, f(\boldsymbol{a}_n)]$$

だとわかる．(0.1) より，これは $\mathcal{A}$ と $\mathcal{B}$ に関する f の表現行列に一致する．

もちろん，これら行基本変形でただ答えの行列を求められるだけではなく，そもそも線形写像の表現行列および基底取り替え行列の定義は理解しておくべきである．