# 線形写像と像・核　演習問題 1

**問 1.** 以下の写像が線形写像であることを示せ.

$$\text{(i)}\ f\colon \mathbb{R}^2 \to \mathbb{R}^3,\ f\left(\begin{bmatrix} x \\ y \end{bmatrix}\right) = \begin{bmatrix} x \\ y \\ 0 \end{bmatrix}. \qquad \text{(ii)}\ f\colon \mathbb{R}^3 \to \mathbb{R},\ f\left(\begin{bmatrix} x \\ y \\ z \end{bmatrix}\right) = 2x - y + z.$$

**問 2.** 写像 $f\colon \mathbb{R}^2 \to \mathbb{R}^2,\ f\left(\begin{bmatrix} x \\ y \end{bmatrix}\right) = \begin{bmatrix} x+1 \\ y-2 \end{bmatrix}$ は，線形写像ではない．その理由を述べよ.

**問 3.** 以下の $\mathbb{R}^2$ から $\mathbb{R}^2$ への写像はすべて線形写像（変換）である．各線形写像を $2 \times 2$ 行列 $A$ を用いて $f(\boldsymbol{x}) = A\boldsymbol{x}$ と表すとき，対応する行列 $A$ をそれぞれ述べよ．ただし，$\theta, k \in \mathbb{R}$ とする.

$$\text{(i)}\ f\left(\begin{bmatrix} x \\ y \end{bmatrix}\right) = \begin{bmatrix} x \\ -y \end{bmatrix} \qquad \text{(ii)}\ f\left(\begin{bmatrix} x \\ y \end{bmatrix}\right) = \begin{bmatrix} -x \\ y \end{bmatrix}$$

$$\text{(iii)}\ f\left(\begin{bmatrix} x \\ y \end{bmatrix}\right) = \begin{bmatrix} -x \\ -y \end{bmatrix} \qquad \text{(iv)}\ f\left(\begin{bmatrix} x \\ y \end{bmatrix}\right) = \begin{bmatrix} y \\ x \end{bmatrix}$$

$$\text{(v)}\ f\left(\begin{bmatrix} x \\ y \end{bmatrix}\right) = \begin{bmatrix} x\cos\theta - y\sin\theta \\ x\sin\theta + y\cos\theta \end{bmatrix} \qquad \text{(vi)}\ f\left(\begin{bmatrix} x \\ y \end{bmatrix}\right) = \begin{bmatrix} kx \\ ky \end{bmatrix}$$

**問 4.** 線形写像 $f\colon \mathbb{R}^n \to \mathbb{R}^m$ に対して，その核 $\operatorname{Ker} f$ と像 $\operatorname{Im} f$ の定義を述べよ.

**問 5.** 線形写像 $f\colon \mathbb{R}^4 \to \mathbb{R}^3,\ f\left(\begin{bmatrix} x \\ y \\ z \\ w \end{bmatrix}\right) = \begin{bmatrix} 0 & -1 & 3 & 1 \\ 1 & 3 & -4 & 1 \\ 1 & 2 & -1 & 2 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} x \\ y \\ z \\ w \end{bmatrix}$ に対して，$\operatorname{Ker} f$ の 1 組の基底と $\dim(\operatorname{Ker} f)$ を求めよ．また，$\operatorname{Im} f$ の 1 組の基底と $\dim(\operatorname{Im} f)$ を求めよ.