§5 線形写像と像・核　演習問題 2　解答

✐ 問題の難易度の目安【基礎】★☆☆　【標準】★★☆　【発展】★★★

1 (★☆☆)(線形写像の像と核)

次の線形写像の像と核を求めよ．

$$f : \mathbb{R}^3 \to \mathbb{R}^2\,; \quad f\left(\begin{pmatrix} x \\ y \\ z \end{pmatrix}\right) := \begin{pmatrix} x-y+z \\ 2x-2y+2z \end{pmatrix}.$$

解

$$f\left(\begin{pmatrix} x \\ y \\ z \end{pmatrix}\right) := \begin{pmatrix} x-y+z \\ 2x-2y+2z \end{pmatrix} = (x-y+z)\begin{pmatrix} 1 \\ 2 \end{pmatrix}$$

であるから，$\mathrm{Im} f$ は $\left\{\begin{pmatrix} 1 \\ 2 \end{pmatrix}\right\}$ を基底とする $\mathbb{R}^2$ の **1 次元部分空間.**

次に，$f\left(\begin{pmatrix} x \\ y \\ z \end{pmatrix}\right) = \boldsymbol{o} \quad \cdots$ ① とすると，$x-y+z=0$, i.e., $z=-x+y$．したがって①の解は $\begin{pmatrix} x \\ y \\ z \end{pmatrix} = s\begin{pmatrix} 1 \\ 0 \\ -1 \end{pmatrix} + t\begin{pmatrix} 0 \\ 1 \\ 1 \end{pmatrix}$ $(s, t : \text{任意})$．よって，$\mathrm{Ker} f = \mathrm{span}\left\{\begin{pmatrix} 1 \\ 0 \\ -1 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} 0 \\ 1 \\ 1 \end{pmatrix}\right\}$ であって $\left\{\begin{pmatrix} 1 \\ 0 \\ -1 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} 0 \\ 1 \\ 1 \end{pmatrix}\right\}$ は 1 次独立である．

ゆえに，$\mathrm{Ker} f$ は $\left\{\begin{pmatrix} 1 \\ 0 \\ -1 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} 0 \\ 1 \\ 1 \end{pmatrix}\right\}$ を基底とする $\mathbb{R}^3$ の **2 次元部分空間.**

∎

2 (★★☆)(線形変換の像と核の基底と次元)

次の線形変換の像と核の基底と次元を求めよ．

$$f : \mathbb{R}^3 \to \mathbb{R}^3\,; \quad f\left(\begin{pmatrix} x \\ y \\ z \end{pmatrix}\right) := \begin{pmatrix} x+2y-z \\ y+z \\ x+y-2z \end{pmatrix}.$$

解

$$f\left(\begin{pmatrix} x \\ y \\ z \end{pmatrix}\right) := \begin{pmatrix} x+2y-z \\ y+z \\ x+y-2z \end{pmatrix} = x\begin{pmatrix} 1 \\ 0 \\ 1 \end{pmatrix} + y\begin{pmatrix} 2 \\ 1 \\ 1 \end{pmatrix} + z\begin{pmatrix} -1 \\ 1 \\ -2 \end{pmatrix}$$

$$=: x\boldsymbol{u}_1 + y\boldsymbol{u}_2 + z\boldsymbol{u}_3.$$

ゆえに，$\mathrm{Im} f = \mathrm{span}\,\{\boldsymbol{u}_1, \boldsymbol{u}_2, \boldsymbol{u}_3\}$．一方，$\{\boldsymbol{u}_1, \boldsymbol{u}_2, \boldsymbol{u}_3\}$ は 1 次従属．実際，$\boldsymbol{u}_3 = -3\boldsymbol{u}_1 + \boldsymbol{u}_2$ である．また，

$$(\boldsymbol{u}_1, \boldsymbol{u}_2) = \begin{pmatrix} 1 & 2 \\ 0 & 1 \\ 1 & 1 \end{pmatrix} \quad\to\quad \begin{pmatrix} 1 & 2 \\ 0 & 1 \\ 0 & 0 \end{pmatrix}$$

ゆえ，$(\boldsymbol{u}_1, \boldsymbol{u}_2)$ はフルランク．したがって $\{\boldsymbol{u}_1, \boldsymbol{u}_2\}$ は 1 次独立[1]．

ゆえに，$\{\boldsymbol{u}_1, \boldsymbol{u}_2\}$ は $\mathrm{Im} f$ の基底であり，$\dim \mathrm{Im} f = \mathbf{2}$.

(2) $f\left(\begin{pmatrix} x \\ y \\ z \end{pmatrix}\right) = \boldsymbol{o}$ とすると，$\begin{pmatrix} 1 & 2 & -1 \\ 0 & 1 & 1 \\ 1 & 1 & -2 \end{pmatrix}\begin{pmatrix} x \\ y \\ z \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix}$ $\cdots$① をみたす．係数行列を簡約化すると

$$\begin{pmatrix} 1 & 2 & -1 \\ 0 & 1 & 1 \\ 1 & 1 & -2 \end{pmatrix} \to \begin{pmatrix} 1 & 0 & -3 \\ 0 & 1 & 1 \\ 0 & 0 & 0 \end{pmatrix}$$

であるから，$\begin{cases} x - 3z = 0 \\ y + z = 0 \end{cases}$ すなわち $x = 3z,\ y = -z$．したがって，同次連立方程式①の解は

$$\begin{pmatrix} x \\ y \\ z \end{pmatrix} = \lambda\begin{pmatrix} 3 \\ -1 \\ 1 \end{pmatrix}, \quad \lambda : 任意$$

となるので，$\mathrm{Ker} f = \mathrm{span}\left\{\begin{pmatrix} 3 \\ -1 \\ 1 \end{pmatrix}\right\}$.

以上より $\begin{pmatrix} 3 \\ -1 \\ 1 \end{pmatrix}$ が $\mathrm{Ker} f$ の基底であり，$\dim \mathrm{Ker} f = \mathbf{1}$. ∎

[1] あるいはもっと定義に遡って，「$s\boldsymbol{u}_1 + t\boldsymbol{u}_2 = \boldsymbol{o} \Rightarrow s = t = 0$」をチェックしてもよい

$\boxed{3}$ (★★☆)(線形変換による 1 次独立性)

$f:\mathbb{R}^n\to\mathbb{R}^n$ を線形変換とする．このとき次を示せ：

1. $\{\boldsymbol{a}_1,\ldots,\boldsymbol{a}_n\}$ が 1 次独立で $\mathrm{Ker}\,f=\{\boldsymbol{o}\}$ ならば $\{f(\boldsymbol{a}_1),\ldots,f(\boldsymbol{a}_n)\}$ も 1 次独立である．

2. $\{f(\boldsymbol{a}_1),\ldots,f(\boldsymbol{a}_n)\}$ が 1 次独立ならば $\{\boldsymbol{a}_1,\ldots,\boldsymbol{a}_n\}$ も 1 次独立である．

解 (1)　$\lambda_1 f(\boldsymbol{a}_1)+\cdots+\lambda_n f(\boldsymbol{a}_n)=\boldsymbol{o}$ $(\lambda_i\in\mathbb{R},\ i=1,\ldots,n)$ とすると f は線形だから

$$f\left(\lambda_1\boldsymbol{a}_1+\cdots+\lambda_n\boldsymbol{a}_n\right)=\boldsymbol{o}.$$

したがって，仮定と合わせると $\lambda_1\boldsymbol{a}_1+\cdots+\lambda_n\boldsymbol{a}_n\in\mathrm{Ker}f=\{\boldsymbol{o}\}$，すなわち $\lambda_1\boldsymbol{a}_1+\cdots+\lambda_n\boldsymbol{a}_n=\boldsymbol{o}$. ゆえに $\{\boldsymbol{a}_1,\ldots,\boldsymbol{a}_n\}$ は 1 次独立であるから，$\lambda_1=\cdots=\lambda_n=0$．これより $\{f(\boldsymbol{a}_1),\ldots,f(\boldsymbol{a}_n)\}$ は 1 次独立.

(2)　$f^{-1}:\mathbb{R}^n\to\mathbb{R}^n$ を f の逆変換とする．$f^{-1}(\boldsymbol{x})=\boldsymbol{o}$ とすると，f は線形だから $f(f^{-1}(\boldsymbol{x}))=f(\boldsymbol{o})=\boldsymbol{o}$, すなわち $\boldsymbol{x}=\boldsymbol{o}$. ゆえに $\mathrm{Ker}f^{-1}=\{\boldsymbol{o}\}$ となる. よって (1) の結果より $\{f(\boldsymbol{a}_1),\ldots,f(\boldsymbol{a}_n)\}$ が 1 次独立で，$\mathrm{Ker}f^{-1}=\{\boldsymbol{o}\}$ だから，

$$\{\boldsymbol{a}_1,\ldots,\boldsymbol{a}_n\}=\left\{f^{-1}(f(\boldsymbol{a}_1)),\ldots,f^{-1}(f(\boldsymbol{a}_n))\right\}$$

は 1 次独立である.　■