線形写像と像・核　演習問題１　解答

問 1. 以下の写像が線形写像であることを示せ.

$$\text{(i) } f\colon \mathbb{R}^2 \to \mathbb{R}^3,\ f\left(\begin{bmatrix} x \\ y \end{bmatrix}\right) = \begin{bmatrix} x \\ y \\ 0 \end{bmatrix}. \qquad \text{(ii) } f\colon \mathbb{R}^3 \to \mathbb{R},\ f\left(\begin{bmatrix} x \\ y \\ z \end{bmatrix}\right) = 2x - y + z.$$

解答. 写像 $f\colon \mathbb{R}^n \to \mathbb{R}^m$ が線形写像であるとは,

(L1) $\boldsymbol{a}, \boldsymbol{b} \in \mathbb{R}^n \Rightarrow f(\boldsymbol{a}+\boldsymbol{b}) = f(\boldsymbol{a}) + f(\boldsymbol{b})$,
(L2) $\boldsymbol{a} \in \mathbb{R}^n,\ k \in \mathbb{R} \Rightarrow f(k\boldsymbol{a}) = kf(\boldsymbol{a})$

が成り立つときをいう．上記 2 つの命題が成立することは，次の命題が成立することと同値である．

(L3) $\boldsymbol{a}, \boldsymbol{b} \in \mathbb{R}^n,\ k, \ell \in \mathbb{R} \Rightarrow f(k\boldsymbol{a} + \ell\boldsymbol{b}) = kf(\boldsymbol{a}) + \ell f(\boldsymbol{b})$

したがって写像 $f\colon \mathbb{R}^n \to \mathbb{R}^m$ が線形写像であることを示すためには，(L1), (L2) が成り立つこと，もしくは (L3) が成り立つことを示せばよい．

(i) $\boldsymbol{a}_1 = \begin{bmatrix} a_1 \\ a_2 \end{bmatrix}, \boldsymbol{b} = \begin{bmatrix} b_1 \\ b_2 \end{bmatrix} \in \mathbb{R}^2,\ k, \ell \in \mathbb{R}$ とする．このとき

$$\begin{aligned} f(k\boldsymbol{a} + \ell\boldsymbol{b}) &= f\left(\begin{bmatrix} ka_1 + \ell b_1 \\ ka_2 + \ell b_2 \end{bmatrix}\right) = \begin{bmatrix} ka_1 + \ell b_1 \\ ka_2 + \ell b_2 \\ 0 \end{bmatrix} = k\begin{bmatrix} a_1 \\ a_2 \\ 0 \end{bmatrix} + \ell\begin{bmatrix} b_1 \\ b_2 \\ 0 \end{bmatrix} \\ &= kf\left(\begin{bmatrix} a_1 \\ a_2 \end{bmatrix}\right) + \ell f\left(\begin{bmatrix} b_1 \\ b_2 \end{bmatrix}\right) = kf(\boldsymbol{a}) + \ell f(\boldsymbol{b}) \end{aligned}$$

が成り立つ．したがって，f は線形写像である． ■

(ii) $\boldsymbol{a}_1 = \begin{bmatrix} a_1 \\ a_2 \\ a_3 \end{bmatrix}, \boldsymbol{b} = \begin{bmatrix} b_1 \\ b_2 \\ b_3 \end{bmatrix} \in \mathbb{R}^3,\ k, \ell \in \mathbb{R}$ とする．このとき

$$\begin{aligned} f(k\boldsymbol{a} + \ell\boldsymbol{b}) &= f\left(\begin{bmatrix} ka_1 + \ell b_1 \\ ka_2 + \ell b_2 \\ ka_3 + \ell b_3 \end{bmatrix}\right) = 2(ka_1 + \ell b_1) - (ka_2 + \ell b_2) + (ka_3 + \ell b_3) \\ &= k(2a_1 - a_2 + a_3) + \ell(2b_1 - b_2 + b_3) = kf\left(\begin{bmatrix} a_1 \\ a_2 \\ a_3 \end{bmatrix}\right) + \ell f\left(\begin{bmatrix} b_1 \\ b_2 \\ b_3 \end{bmatrix}\right) \\ &= kf(\boldsymbol{a}) + \ell f(\boldsymbol{b}) \end{aligned}$$

が成り立つ．したがって，f は線形写像である． ■

問 2. 写像 $f\colon \mathbb{R}^2 \to \mathbb{R}^2,\ f\left(\begin{bmatrix} x \\ y \end{bmatrix}\right) = \begin{bmatrix} x+1 \\ y-2 \end{bmatrix}$ は，線形写像ではない．その理由を述べよ．

解答. （(L1) $\sim$ (L3) を前問と同じとする．(L2) が成り立つならば

(L0) $f(\boldsymbol{o}) = \boldsymbol{o}$ （左辺の $\boldsymbol{o}$ は $\mathbb{R}^n$ の，右辺の $\boldsymbol{o}$ は $\mathbb{R}^m$ のそれぞれ零ベクトルであることに注意）

が成り立つことがわかる．したがって，$f\colon \mathbb{R}^n \to \mathbb{R}^m$ が線形写像ではないことを示すためには，(L0) ∼ (L3) のいずれかが成立しないこと，すなわち

- $f(\boldsymbol{o}) \neq \boldsymbol{o}$,
- $\boldsymbol{a}, \boldsymbol{b} \in \mathbb{R}^n$ であるが，$f(\boldsymbol{a}+\boldsymbol{b}) \neq f(\boldsymbol{a}) + f(\boldsymbol{b})$ となってしまう $\boldsymbol{a}, \boldsymbol{b}$ を見つける，
- $\boldsymbol{a} \in \mathbb{R}^n$, $k \in \mathbb{R}$ にも関わらず，$f(k\boldsymbol{a}) \neq kf(\boldsymbol{a})$ となってしまう $\boldsymbol{a}$, $k \in \mathbb{R}$ を見つける，
- $\boldsymbol{a}, \boldsymbol{b} \in \mathbb{R}^n$, $k, \ell \in \mathbb{R}$ であるが，$f(k\boldsymbol{a} + \ell\boldsymbol{b}) \neq kf(\boldsymbol{a}) + \ell f(\boldsymbol{b})$ となってしまう $\boldsymbol{a}, \boldsymbol{b} \in \mathbb{R}^n$, $k, \ell \in \mathbb{R}$ を見つける

のいずれかを確認すればよい．）

$$f(\boldsymbol{o}) = \left(\begin{bmatrix} 0 \\ 0 \end{bmatrix}\right) = \begin{bmatrix} 0+1 \\ 0-2 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 1 \\ -2 \end{bmatrix} \neq \boldsymbol{o}$$

となるから，f は線形写像ではない． ■

問 3. 以下の $\mathbb{R}^2$ から $\mathbb{R}^2$ への写像はすべて線形写像（変換）である．各線形写像を 2×2 行列 A を用いて $f(\boldsymbol{x}) = A\boldsymbol{x}$ と表すとき，対応する行列 A をそれぞれ述べよ．ただし，$\theta, k \in \mathbb{R}$ とする．

$$\text{(i) } f\left(\begin{bmatrix} x \\ y \end{bmatrix}\right) = \begin{bmatrix} x \\ -y \end{bmatrix} \qquad \text{(ii) } f\left(\begin{bmatrix} x \\ y \end{bmatrix}\right) = \begin{bmatrix} -x \\ y \end{bmatrix}$$

$$\text{(iii) } f\left(\begin{bmatrix} x \\ y \end{bmatrix}\right) = \begin{bmatrix} -x \\ -y \end{bmatrix} \qquad \text{(iv) } f\left(\begin{bmatrix} x \\ y \end{bmatrix}\right) = \begin{bmatrix} y \\ x \end{bmatrix}$$

$$\text{(v) } f\left(\begin{bmatrix} x \\ y \end{bmatrix}\right) = \begin{bmatrix} x\cos\theta - y\sin\theta \\ x\sin\theta + y\cos\theta \end{bmatrix} \qquad \text{(vi) } f\left(\begin{bmatrix} x \\ y \end{bmatrix}\right) = \begin{bmatrix} kx \\ ky \end{bmatrix}$$

解答.

$$\text{(i) } A = \begin{bmatrix} 1 & 0 \\ 0 & -1 \end{bmatrix} \qquad \text{(ii) } A = \begin{bmatrix} -1 & 0 \\ 0 & 1 \end{bmatrix}$$

$$\text{(iii) } A = \begin{bmatrix} -1 & 0 \\ 0 & -1 \end{bmatrix} \qquad \text{(iv) } A = \begin{bmatrix} 0 & 1 \\ 1 & 0 \end{bmatrix}$$

$$\text{(v) } A = \begin{bmatrix} \cos\theta & -\sin\theta \\ \sin\theta & \cos\theta \end{bmatrix} \qquad \text{(vi) } A = \begin{bmatrix} k & 0 \\ 0 & k \end{bmatrix}$$

■

注意. $\begin{bmatrix} x \\ y \end{bmatrix}$ を点 (x, y) の位置ベクトルと同一視するとき（$\begin{bmatrix} x \\ y \end{bmatrix}$ を (x, y) と同一視するとき），(i)∼(vi) の線形変換はそれぞれ，(x, y) を x 軸に関する対称移動，y 軸に対する対称移動，原点に関する対称移動，直線 $y = x$ に関する対称移動，原点を中心に θ 回転，各座標 k 倍，することに対応する．

線形写像 $f\colon \mathbb{R}^n \to \mathbb{R}^m$ は必ず $m \times n$ 行列 A を用いて $f(\boldsymbol{x}) = A\boldsymbol{x} \quad (\boldsymbol{x} \in \mathbb{R}^n)$ と表される．この際の A は，定義域 $\mathbb{R}^n$ の標準基底 $\{\boldsymbol{e}_1, \boldsymbol{e}_2, \ldots, \boldsymbol{e}_n\}$ の各ベクトルを f で写した n 個の m 次元ベクトル $f(\boldsymbol{e}_1), f(\boldsymbol{e}_2), \ldots, f(\boldsymbol{e}_n) \in \mathbb{R}^m$ を各列に並べて得られる行列 $[f(\boldsymbol{e}_1), f(\boldsymbol{e}_2), \ldots, f(\boldsymbol{e}_n)]$ と等しい．

また，この $m \times n$ 行列 A は，定義域 $\mathbb{R}^n$ の標準基底と値域 $\mathbb{R}^m$ の標準基底に関する f の表現行列と一致する．我々が標準的な考え方でベクトル空間を眺めたとき，線形写像 f は左から行列 A を掛ける操作に見えているということである．

問 4. 線形写像 $f\colon \mathbb{R}^n \to \mathbb{R}^m$ に対して，その核 $\operatorname{Ker} f$ と像 $\operatorname{Im} f$ の定義を述べよ．

解答.

$$\operatorname{Ker} f = \{\boldsymbol{x} \in \mathbb{R}^n \mid f(\boldsymbol{x}) = \boldsymbol{o}\}, \quad \operatorname{Im} f = \{f(\boldsymbol{x}) \in \mathbb{R}^m \mid \boldsymbol{x} \in \mathbb{R}^n\}.$$

■

問 5. 線形写像 $f\colon \mathbb{R}^4 \to \mathbb{R}^3$, $f\left(\begin{bmatrix} x \\ y \\ z \\ w \end{bmatrix}\right) = \begin{bmatrix} 0 & -1 & 3 & 1 \\ 1 & 3 & -4 & 1 \\ 1 & 2 & -1 & 2 \end{bmatrix}\begin{bmatrix} x \\ y \\ z \\ w \end{bmatrix}$ に対して，$\operatorname{Ker} f$ の 1 組の基底と $\dim(\operatorname{Ker} f)$ を求めよ．また，$\operatorname{Im} f$ の 1 組の基底と $\dim(\operatorname{Im} f)$ を求めよ．

解答. （$\operatorname{Ker} f$ について．）

$$A = \begin{bmatrix} 0 & -1 & 3 & 1 \\ 1 & 3 & -4 & 1 \\ 1 & 2 & -1 & 2 \end{bmatrix}$$

とおくと

$$\operatorname{Ker} f = \{\boldsymbol{x} \in \mathbb{R}^4 \mid f(\boldsymbol{x}) = \boldsymbol{o}\} = \{\boldsymbol{x} \in \mathbb{R}^4 \mid A\boldsymbol{x} = \boldsymbol{o}\}.$$

したがって，$\operatorname{Ker} f$ は同次連立 1 次方程式 $A\boldsymbol{x} = \boldsymbol{o}$ の解空間と等しい．A を行基本変形すると

$$A \to \cdots \to \begin{bmatrix} 1 & 0 & 5 & 4 \\ 0 & 1 & -3 & -1 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \end{bmatrix} \tag{0.1}$$

とわかるので $A\boldsymbol{x} = \boldsymbol{o}$ の解は

$$\boldsymbol{x} = c_1 \begin{bmatrix} -5 \\ 3 \\ 1 \\ 0 \end{bmatrix} + c_2 \begin{bmatrix} -4 \\ 1 \\ 0 \\ 1 \end{bmatrix} \quad (c_1, c_2 \in \mathbb{R})$$

とわかる．すなわち

$$\boldsymbol{a}_1 = \begin{bmatrix} -5 \\ 3 \\ 1 \\ 0 \end{bmatrix}, \quad \boldsymbol{a}_2 = \begin{bmatrix} -4 \\ 1 \\ 0 \\ 1 \end{bmatrix}$$

とおくと，$\boldsymbol{a}_1$, $\boldsymbol{a}_2$ の 1 次結合で表されるベクトルは $A\boldsymbol{x} = \boldsymbol{o}$ の解とわかり，逆にそのような 1 次結合で表されるベクトルは $A\boldsymbol{x} = \boldsymbol{o}$ の解だとわかった．したがって，$\operatorname{Ker} f = \langle \boldsymbol{a}_1, \boldsymbol{a}_2 \rangle$．また，$c_1\boldsymbol{a}_1 + c_2\boldsymbol{a}_2 = \boldsymbol{o}$ としたとき，第 3, 4 成分に注目すると直ちに $c_1 = c_2 = 0$ とわかる．よって $\{\boldsymbol{a}_1, \boldsymbol{a}_2\}$ は 1 次独立である．以上より，$\{\boldsymbol{a}_1, \boldsymbol{a}_2\}$ は $\operatorname{Ker} f$ の基底であり，$\dim(\operatorname{Ker} f) = 2$ である． ■

注意. 同次連立 1 次方程式 $A\boldsymbol{x} = \boldsymbol{o}$ の基本解はその解空間の 1 組の基底に必ずなっている．

（$\mathrm{Im}\, f$ について．）A の i 列ベクトルを $\boldsymbol{b}_i$ とおく．すなわち

$$\boldsymbol{b}_1 = \begin{bmatrix} 0 \\ 1 \\ 1 \end{bmatrix}, \boldsymbol{b}_2 = \begin{bmatrix} -1 \\ 3 \\ 2 \end{bmatrix}, \boldsymbol{b}_3 = \begin{bmatrix} 3 \\ -4 \\ -1 \end{bmatrix}, \boldsymbol{b}_4 = \begin{bmatrix} 1 \\ 1 \\ 2 \end{bmatrix}.$$

このとき

$$\begin{aligned} \mathrm{Im}\, f &= \{ f(\boldsymbol{x}) \in \mathbb{R}^3 \,|\, \boldsymbol{x} \in \mathbb{R}^4 \} = \{ A\boldsymbol{x} \,|\, \boldsymbol{x} \in \mathbb{R}^4 \} \\ &= \left\{ [\boldsymbol{b}_1, \boldsymbol{b}_2, \boldsymbol{b}_3, \boldsymbol{b}_4] \begin{bmatrix} x_1 \\ x_2 \\ x_3 \\ x_4 \end{bmatrix} \,\middle|\, x_1, x_2, x_3, x_4 \in \mathbb{R} \right\} \\ &= \{ x_1\boldsymbol{b}_1 + x_2\boldsymbol{b}_2 + x_3\boldsymbol{b}_3 + x_4\boldsymbol{b}_4 \,|\, x_1, x_2, x_3, x_4 \in \mathbb{R} \} \\ &= \langle \boldsymbol{b}_1, \boldsymbol{b}_2, \boldsymbol{b}_3, \boldsymbol{b}_4 \rangle. \end{aligned}$$

すなわち，$\mathrm{Im}\, f$ は $\boldsymbol{b}_1, \boldsymbol{b}_2, \boldsymbol{b}_3, \boldsymbol{b}_4$ が生成する $\mathbb{R}^3$ の部分空間と等しい．A を行基本変形し階段行列にした結果 (0.1) から $\{\boldsymbol{b}_1, \boldsymbol{b}_2\}$ は 1 次独立だとわかる．さらに $\boldsymbol{b}_3 = 5\boldsymbol{b}_1 - 3\boldsymbol{b}_2$, $\boldsymbol{b}_4 = 4\boldsymbol{b}_1 - \boldsymbol{b}_2$ とわかるので，$\mathrm{Im}\, f = \langle \boldsymbol{b}_1, \boldsymbol{b}_2, \boldsymbol{b}_3, \boldsymbol{b}_4 \rangle = \langle \boldsymbol{b}_1, \boldsymbol{b}_2 \rangle$ とわかる．以上より，$\{\boldsymbol{b}_1, \boldsymbol{b}_2\}$ は $\mathrm{Im}\, f$ の基底であり，$\dim(\mathrm{Im}\, f) = 2$. ■

注意． $\boldsymbol{a}_1, \boldsymbol{a}_2, \ldots, \boldsymbol{a}_n \in \mathbb{R}^m$ に対して

$$[\boldsymbol{a}_1, \boldsymbol{a}_2, \cdots, \boldsymbol{a}_n] \xrightarrow{\text{階段行列へ変形}} [\boldsymbol{b}_1, \boldsymbol{b}_2, \cdots, \boldsymbol{b}_n]$$

とするとき

(I) $\boldsymbol{a}_{i_1}, \boldsymbol{a}_{i_2}, \ldots, \boldsymbol{a}_{i_\ell}$ が 1 次独立（従属） $\Leftrightarrow$ $\boldsymbol{b}_{i_1}, \boldsymbol{b}_{i_2}, \ldots, \boldsymbol{b}_{i_\ell}$ が 1 次独立（従属）

(II) $\boldsymbol{a}_j = k_1\boldsymbol{a}_1 + \cdots + k_{j-1}\boldsymbol{a}_{j-1} + k_{j+1}\boldsymbol{a}_{j+1} + \cdots + k_n\boldsymbol{a}_n$
$\Leftrightarrow \boldsymbol{b}_j = k_1\boldsymbol{b}_1 + \cdots + k_{j-1}\boldsymbol{b}_{j-1} + k_{j+1}\boldsymbol{b}_{j+1} + \cdots + k_n\boldsymbol{b}_n.$

が成り立つ，すなわち行基本変形する前の行列の列ベクトルの組がみたす 1 次関係式を，行基本変形した後の行列の対応する列ベクトルの組もみたす．これらは行基本変形を施すことが，ある正則行列を左から掛けることと等しいことを利用して証明される．