基底・次元　演習問題 1

問 1. $\boldsymbol{a}_1 = \begin{bmatrix} 2 \\ 1 \end{bmatrix}$, $\boldsymbol{a}_2 = \begin{bmatrix} 1 \\ 1 \end{bmatrix}$ とする．以下の問に答えよ．

(i) $\mathbb{R}^2$ に含まれるどんなベクトルも $\boldsymbol{a}_1$, $\boldsymbol{a}_2$ の 1 次結合で表せること，すなわち $\mathbb{R}^2 \subset \langle \boldsymbol{a}_1, \boldsymbol{a}_2 \rangle$ であることを示せ．

(Hint:　$\boldsymbol{x} = \begin{bmatrix} x_1 \\ x_2 \end{bmatrix}$ とする（任意に $\mathbb{R}^2$ に含まれるベクトルをとってくる）．このとき $\boldsymbol{x} = k_1 \boldsymbol{a} + k_2 \boldsymbol{a}_2 \quad (k_1, k_2 \in \mathbb{R})$ の形で表せることを言えばよい．)

(ii) $\{\boldsymbol{a}_1, \boldsymbol{a}_2\}$ が $\mathbb{R}^2$ の基底であることを示せ．

問 2. (i)

$$A = \begin{bmatrix} 1 & 1 & 3 & 4 \\ 1 & 1 & 5 & 6 \\ 2 & 2 & 7 & 9 \end{bmatrix}$$

とする．$\operatorname{rank} A$ を求めよ．

(ii) 同次連立 1 次方程式

$$\begin{cases} x_1 & +x_2 & +3x_3 & +4x_4 & = & 0 \\ x_1 & +x_2 & +5x_3 & +6x_4 & = & 0 \\ 2x_1 & +2x_2 & +7x_3 & +9x_4 & = & 0 \end{cases}$$

を解け．

(iii) (ii) の同次連立 1 次方程式の解空間を W とする．すなわち

$$W = \left\{ \boldsymbol{x} = \begin{bmatrix} x_1 \\ x_2 \\ x_3 \\ x_4 \end{bmatrix} \in \mathbb{R}^4 \;\middle|\; \begin{array}{cccccc} x_1 & +x_2 & +3x_3 & +4x_4 & = & 0 \\ x_1 & +x_2 & +5x_3 & +6x_4 & = & 0 \\ 2x_1 & +2x_2 & +7x_3 & +9x_4 & = & 0 \end{array} \right\}$$

とする．W の基底と $\dim W$ を求めよ．