部分空間の次元・基底　解答

$\boxed{\mathbf{1}}$

(1) $W = \left\{ \begin{pmatrix} x \\ y \\ z \end{pmatrix} \middle| \, 3x+4y+z=0 \right\}$

$3x+4y+z=0$ より $z=-3x-4y$ となるので，

$$\begin{pmatrix} x \\ y \\ z \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} x \\ y \\ -3x-4y \end{pmatrix} = x\begin{pmatrix} 1 \\ 0 \\ -3 \end{pmatrix} + y\begin{pmatrix} 0 \\ 1 \\ -4 \end{pmatrix}$$

したがって W の基底として

$$\begin{pmatrix} 1 \\ 0 \\ -3 \end{pmatrix}, \quad \begin{pmatrix} 0 \\ 1 \\ -4 \end{pmatrix}$$

が取れ，基底が 2 個のベクトルからなるので W の次元は 2 である。

(2) $W = \left\{ \begin{pmatrix} x \\ y \\ z \end{pmatrix} \middle| \, \begin{matrix} x-y+2z=0 \\ 2x+3y-z=0 \end{matrix} \right\}$

W を定義する連立 1 次方程式を解く。係数行列に行基本変形を施すと，

$$\begin{pmatrix} 1 & -1 & 2 \\ 2 & 3 & -1 \end{pmatrix} \to \begin{pmatrix} 1 & -1 & 5 \\ 0 & 5 & -5 \end{pmatrix} \to \begin{pmatrix} 1 & -1 & 2 \\ 0 & 1 & -1 \end{pmatrix} \to \begin{pmatrix} 1 & 0 & 1 \\ 0 & 1 & -1 \end{pmatrix}$$

となるので，

$$\begin{cases} x+z=0 \\ y-z=0 \end{cases}$$

これより $x=-z, y=z$ を得るので，

$$\begin{pmatrix} x \\ y \\ z \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} -z \\ z \\ z \end{pmatrix} = z\begin{pmatrix} -1 \\ 1 \\ 1 \end{pmatrix}$$

したがって W の基底として

$$\begin{pmatrix} -1 \\ 1 \\ 1 \end{pmatrix}$$

が取れ，基底が 1 個のベクトルからなるので W の次元は 1 である。

(3) $W = \left\{ \begin{pmatrix} x \\ y \\ z \end{pmatrix} \middle| \, \begin{matrix} 2x+y-1=0 \\ x-y+3z=0 \\ 4x-y+5z=0 \end{matrix} \right\}$

$$\begin{pmatrix} 2 & 1 & -1 \\ 1 & -1 & 3 \\ 4 & -1 & 5 \end{pmatrix} \to \begin{pmatrix} 0 & 3 & -7 \\ 1 & -1 & 3 \\ 0 & 3 & -7 \end{pmatrix} \to \begin{pmatrix} 1 & -1 & 3 \\ 0 & 3 & -7 \\ 0 & 0 & 0 \end{pmatrix} \to \begin{pmatrix} 1 & -1 & 3 \\ 0 & 1 & -\frac{7}{3} \\ 0 & 0 & 0 \end{pmatrix} \to \begin{pmatrix} 1 & 0 & \frac{2}{3} \\ 0 & 1 & -\frac{7}{3} \\ 0 & 0 & 0 \end{pmatrix}$$

となるので，

$$\begin{cases} x + \dfrac{2}{3}z = 0 \\ y - \dfrac{7}{3}z = 0 \end{cases}$$

これより $x = -\dfrac{2}{3}z, y = \dfrac{7}{3}z$ を得るので，

$$\begin{pmatrix} x \\ y \\ z \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} -\frac{2}{3}z \\ \frac{7}{3}z \\ z \end{pmatrix} = \frac{z}{3} \begin{pmatrix} -2 \\ 7 \\ 3 \end{pmatrix}$$

したがって W の基底として

$$\begin{pmatrix} -2 \\ 7 \\ 3 \end{pmatrix}$$

が取れ，基底が 1 個のベクトルからなるので W の次元は 1 である。

(4) $W = \left\{ \begin{pmatrix} x \\ y \\ z \\ w \end{pmatrix} \middle| \begin{matrix} x + y + z - w = 0 \\ x - y + z + w = 0 \end{matrix} \right\}$

$$\begin{pmatrix} 1 & 1 & 1 & -1 \\ 1 & -1 & 1 & 1 \end{pmatrix} \to \begin{pmatrix} 1 & 1 & 1 & -1 \\ 0 & -2 & 0 & 2 \end{pmatrix} \to \begin{pmatrix} 1 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 1 & 0 & -1 \end{pmatrix}$$

となるので，$x = -z, y = w$ を得て，

$$\begin{pmatrix} x \\ y \\ z \\ w \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} -z \\ w \\ z \\ w \end{pmatrix} = z \begin{pmatrix} -1 \\ 0 \\ 1 \\ 0 \end{pmatrix} + w \begin{pmatrix} 0 \\ 1 \\ 0 \\ 1 \end{pmatrix}$$

したがって W の基底として

$$\begin{pmatrix} -1 \\ 0 \\ 1 \\ 0 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} 0 \\ 1 \\ 0 \\ 1 \end{pmatrix}$$

が取れ，基底が 2 個のベクトルからなるので W の次元は 2 である。

(5) $W=\left\{\begin{pmatrix}x\\y\\z\\w\end{pmatrix}\middle|\begin{array}{l}x+y+z-2w=0\\x-y-z+w=0\end{array}\right\}$

$$\begin{pmatrix}1&1&1&-2\\1&-1&-1&1\end{pmatrix}\to\begin{pmatrix}1&1&1&-2\\0&-2&-2&3\end{pmatrix}\to\begin{pmatrix}1&0&0&-\frac{1}{2}\\0&1&1&-\frac{3}{2}\end{pmatrix}$$

より

$$\begin{cases}x-\dfrac{1}{2}w=0\\y+z-\dfrac{3}{2}w=0\end{cases}$$

これを解いて $x=\dfrac{1}{2}w, y=-z+\dfrac{3}{2}w$，これより

$$\begin{pmatrix}x\\y\\z\\w\end{pmatrix}=\begin{pmatrix}\frac{1}{2}w\\-z+\frac{3}{2}w\\z\\w\end{pmatrix}=z\begin{pmatrix}0\\-1\\1\\0\end{pmatrix}+w\begin{pmatrix}\frac{1}{2}\\\frac{3}{2}\\0\\1\end{pmatrix}$$

したがって W の基底として

$$\begin{pmatrix}0\\-1\\1\\0\end{pmatrix},\begin{pmatrix}\frac{1}{2}\\\frac{3}{2}\\0\\1\end{pmatrix}$$

が取れ，基底が 2 個のベクトルからなるので W の次元は 2 である。

(6) $W=\left\{\begin{pmatrix}x\\y\\z\\w\end{pmatrix}\middle|\begin{array}{l}3x+y+z+2w=0\\x-2y+z-3w=0\\2x+4y-z-w=0\end{array}\right\}$

$$\begin{pmatrix}3&1&1&2\\1&-2&1&-3\\2&4&-1&-1\end{pmatrix}\to\begin{pmatrix}0&7&-2&11\\1&-2&1&-3\\0&8&-3&5\end{pmatrix}\to\begin{pmatrix}1&-2&1&-3\\0&1&-\frac{3}{8}&\frac{5}{8}\\0&7&-2&11\end{pmatrix}\to\begin{pmatrix}1&0&\frac{1}{4}&-\frac{7}{4}\\0&1&-\frac{3}{8}&\frac{5}{8}\\0&0&\frac{5}{8}&\frac{53}{8}\end{pmatrix}$$

$$\to\begin{pmatrix}1&0&\frac{1}{4}&-\frac{7}{4}\\0&1&-\frac{3}{8}&\frac{5}{8}\\0&0&1&\frac{53}{5}\end{pmatrix}\to\begin{pmatrix}1&0&0&-\frac{22}{5}\\0&1&0&\frac{23}{5}\\0&0&1&\frac{53}{5}\end{pmatrix}$$

より

$$x=\frac{22}{5}w,\ y=-\frac{23}{5}w,\ z=-\frac{53}{5}w$$

これより

$$\begin{pmatrix}x\\y\\z\\w\end{pmatrix}=\begin{pmatrix}\frac{22}{5}w\\-\frac{23}{5}w\\-\frac{53}{5}w\\w\end{pmatrix}=\frac{w}{5}\begin{pmatrix}22\\-23\\-53\\5\end{pmatrix}$$

したがって W の基底として

$$\begin{pmatrix} 22 \\ -23 \\ -53 \\ 5 \end{pmatrix}$$

が取れ，基底が 1 個のベクトルからなるので W の次元は 1 である。

(7) $W = \left\{ \begin{pmatrix} x \\ y \\ z \\ w \end{pmatrix} \middle| \begin{array}{l} x+2y-2z+2w=0 \\ 2x+3y-z-w=0 \\ x+4y+z+2w=0 \end{array} \right\}$

$$\begin{pmatrix} 1 & 2 & -2 & 2 \\ 2 & 3 & -1 & -1 \\ 1 & 4 & 1 & 2 \end{pmatrix} \to \begin{pmatrix} 1 & 2 & -2 & 2 \\ 0 & -1 & 3 & -5 \\ 0 & 2 & 3 & 0 \end{pmatrix} \to \begin{pmatrix} 1 & 0 & 4 & -8 \\ 0 & 1 & -3 & 5 \\ 0 & 0 & 9 & -10 \end{pmatrix} \to \begin{pmatrix} 0 & 7 & -2 & 11 \\ 1 & -2 & 1 & -3 \\ 0 & 8 & -3 & 5 \end{pmatrix}$$
$$\to \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 & -\frac{32}{9} \\ 0 & 1 & 0 & \frac{5}{3} \\ 0 & 0 & 1 & -\frac{10}{9} \end{pmatrix}$$

より

$$x = \frac{32}{9}w,\ y = -\frac{5}{3}w,\ z = \frac{10}{9}w$$

これより

$$\begin{pmatrix} x \\ y \\ z \\ w \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} \frac{32}{9}w \\ -\frac{5}{3}w \\ \frac{10}{9}w \\ w \end{pmatrix} = \frac{w}{9} \begin{pmatrix} 32 \\ -15 \\ 10 \\ 9 \end{pmatrix}$$

したがって W の基底として

$$\begin{pmatrix} 32 \\ -15 \\ 10 \\ 9 \end{pmatrix}$$

が取れ，基底が 1 個のベクトルからなるので W の次元は 1 である。

(8) $W = \left\{ \begin{pmatrix} x_1 \\ x_2 \\ x_3 \\ x_4 \\ x_5 \end{pmatrix} \middle| \begin{array}{l} 2x_1+3x_2-x_3+2x_4-x_5=0 \\ 3x_1+x_2-2x_3-x_4+3x_5=0 \\ 4x_1-2x_2+x_3+x_4+x_5=0 \end{array} \right\}$

右側から基本変形してみる。

$$\begin{pmatrix} 2 & 3 & -1 & 2 & -1 \\ 3 & 1 & -2 & -1 & 3 \\ 4 & -2 & 1 & 1 & 1 \end{pmatrix} \to \begin{pmatrix} -2 & -3 & 1 & -2 & 1 \\ 9 & 10 & -5 & 5 & 0 \\ 6 & 1 & 0 & 3 & 0 \end{pmatrix} \to \begin{pmatrix} -2 & -3 & 1 & -2 & 1 \\ 2 & \frac{1}{3} & 0 & 1 & 0 \\ 9 & 10 & -5 & 5 & 0 \end{pmatrix}$$

$$\to \begin{pmatrix} 2 & -\frac{7}{3} & 1 & 0 & 1 \\ 2 & \frac{1}{3} & 0 & 1 & 0 \\ -1 & \frac{25}{3} & -5 & 0 & 0 \end{pmatrix} \to \begin{pmatrix} 2 & -\frac{7}{3} & 1 & 0 & 1 \\ 2 & \frac{1}{3} & 0 & 1 & 0 \\ \frac{1}{5} & -\frac{5}{3} & 1 & 0 & 0 \end{pmatrix} \to \begin{pmatrix} \frac{9}{5} & -\frac{2}{3} & 0 & 0 & 1 \\ 2 & \frac{1}{3} & 0 & 1 & 0 \\ \frac{1}{5} & -\frac{5}{3} & 1 & 0 & 0 \end{pmatrix}$$

より

$$x_5 = -\frac{9}{5}x_1 + \frac{2}{3}x_2,\ x_4 = -2x_1 - \frac{1}{3}x_2,\ x_3 = -\frac{1}{5}x_1 + \frac{5}{3}x_2$$

これより

$$\begin{pmatrix} x_1 \\ x_2 \\ x_3 \\ x_4 \\ x_5 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} x_1 \\ x_2 \\ -\frac{1}{5}x_1 + \frac{5}{3}x_2 \\ -2x_1 - \frac{1}{3}x_2 \\ -\frac{9}{5}x_1 + \frac{2}{3}x_2 \end{pmatrix} = \frac{x_1}{5}\begin{pmatrix} 5 \\ 0 \\ -1 \\ -10 \\ -9 \end{pmatrix} + \frac{x_2}{3}\begin{pmatrix} 0 \\ 3 \\ 5 \\ -1 \\ 2 \end{pmatrix}$$

したがって W の基底として

$$\begin{pmatrix} 5 \\ 0 \\ -1 \\ -10 \\ -9 \end{pmatrix},\ \begin{pmatrix} 0 \\ 3 \\ 5 \\ -1 \\ 2 \end{pmatrix}$$

が取れ，基底が 2 個のベクトルからなるので W の次元は 2 である。

2

(1) $W = \left\langle \begin{pmatrix} 3 \\ 5 \\ 1 \end{pmatrix} \right\rangle + \left\langle \begin{pmatrix} 2 \\ 2 \\ 3 \end{pmatrix} \right\rangle$

$W = \left\langle \begin{pmatrix} 3 \\ 5 \\ 1 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} 2 \\ 2 \\ 3 \end{pmatrix} \right\rangle$ であるが，この 2 つのベクトルは明らかに 1 次独立ゆえ，この 2 つのベクトルが基底に取れ，W は 2 次元である。

(2) $W = \left\langle \begin{pmatrix} 2 \\ 1 \\ 3 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} 0 \\ 2 \\ -1 \end{pmatrix} \right\rangle + \left\langle \begin{pmatrix} 4 \\ 4 \\ 5 \end{pmatrix} \right\rangle$

$$W = \left\langle \begin{pmatrix} 2 \\ 1 \\ 3 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} 0 \\ 2 \\ -1 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} 4 \\ 4 \\ 5 \end{pmatrix} \right\rangle$$ である。この 3 つのベクトルの 1 次独立性を調べる。

$$\begin{pmatrix} 2 & 0 & 4 \\ 1 & 2 & 4 \\ 3 & -1 & 5 \end{pmatrix} \to \begin{pmatrix} 0 & -4 & -4 \\ 1 & 2 & 4 \\ 0 & -7 & -7 \end{pmatrix} \to \begin{pmatrix} 0 & 1 & 1 \\ 1 & 2 & 4 \\ 0 & 0 & 0 \end{pmatrix} \to \begin{pmatrix} 0 & 1 & 1 \\ 1 & 0 & 2 \\ 0 & 0 & 0 \end{pmatrix}$$

となるので，1，2 番目のベクトルは 1 次独立で，3 番目のベクトルは 1，2 番目のベクトルの 1 次結合で書ける。したがって

$$\begin{pmatrix} 2 \\ 1 \\ 3 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} 0 \\ 2 \\ -1 \end{pmatrix}$$

が基底に取れ，基底が 2 個のベクトルからなるので W の次元は 2 である。

(3) $$W = \left\langle \begin{pmatrix} 3 \\ 0 \\ 1 \\ 0 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} 4 \\ 2 \\ 0 \\ 3 \end{pmatrix} \right\rangle + \left\langle \begin{pmatrix} 2 \\ 1 \\ 1 \\ 1 \end{pmatrix} \right\rangle$$

$$W = \left\langle \begin{pmatrix} 3 \\ 0 \\ 1 \\ 0 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} 4 \\ 2 \\ 0 \\ 3 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} 2 \\ 1 \\ 1 \\ 1 \end{pmatrix} \right\rangle$$ である。この 3 つのベクトルの 1 次独立性を調べる。

$$\begin{pmatrix} 3 & 4 & 2 \\ 0 & 2 & 1 \\ 1 & 0 & 1 \\ 0 & 3 & 1 \end{pmatrix} \to \begin{pmatrix} 0 & 4 & -1 \\ 0 & 2 & 1 \\ 1 & 0 & 1 \\ 0 & 3 & 1 \end{pmatrix} \to \begin{pmatrix} 0 & 0 & -3 \\ 0 & 1 & \frac{1}{2} \\ 1 & 0 & 1 \\ 0 & 0 & -\frac{1}{2} \end{pmatrix} \to \begin{pmatrix} 0 & 0 & 1 \\ 0 & 1 & \frac{1}{2} \\ 1 & 0 & 1 \\ 0 & 0 & -\frac{1}{2} \end{pmatrix} \to \begin{pmatrix} 0 & 0 & 1 \\ 0 & 1 & 0 \\ 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \end{pmatrix}$$

より 1 次独立である。したがってこの 3 つのベクトルが基底に取れ，基底が 3 個のベクトルからなるので W の次元は 3 である。

(4) $$W = \left\langle \begin{pmatrix} 1 \\ 5 \\ 0 \\ 2 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} 3 \\ 3 \\ 1 \\ 4 \end{pmatrix} \right\rangle + \left\langle \begin{pmatrix} 2 \\ -3 \\ 2 \\ 2 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} 1 \\ 4 \\ 1 \\ 2 \end{pmatrix} \right\rangle$$

$W = \left\langle \begin{pmatrix}1\\5\\0\\2\end{pmatrix}, \begin{pmatrix}3\\3\\1\\4\end{pmatrix}, \begin{pmatrix}2\\-3\\2\\2\end{pmatrix}, \begin{pmatrix}1\\4\\1\\2\end{pmatrix} \right\rangle$ である。この 4 つのベクトルの 1 次独立性を調べる。

$$\begin{pmatrix}1&3&2&1\\5&3&-3&4\\0&1&2&1\\2&4&2&2\end{pmatrix} \to \begin{pmatrix}1&3&2&1\\0&-12&-13&-1\\0&1&2&1\\0&-2&-2&0\end{pmatrix} \to \begin{pmatrix}1&3&2&1\\0&1&2&1\\0&-12&-13&-1\\0&-2&-2&0\end{pmatrix} \to \begin{pmatrix}1&0&-4&-2\\0&1&2&1\\0&0&11&11\\0&0&2&2\end{pmatrix}$$
$$\to \begin{pmatrix}1&0&-4&-2\\0&1&2&1\\0&0&1&1\\0&0&2&2\end{pmatrix} \to \begin{pmatrix}1&0&0&2\\0&1&0&-1\\0&0&1&1\\0&0&0&0\end{pmatrix}$$

より，はじめの 3 つのベクトルが 1 次独立で，4 番目のベクトルを加えると 1 次従属となる。したがって基底として

$$\begin{pmatrix}1\\5\\0\\2\end{pmatrix}, \begin{pmatrix}3\\3\\1\\4\end{pmatrix}, \begin{pmatrix}2\\-3\\2\\2\end{pmatrix}$$

が取れ，基底が 3 個のベクトルからなるので W の次元は 3 である。

(5) $W = \left\langle \begin{pmatrix}3\\2\\1\\1\end{pmatrix}, \begin{pmatrix}0\\3\\-2\\1\end{pmatrix} \right\rangle + \left\langle \begin{pmatrix}5\\2\\3\\3\end{pmatrix}, \begin{pmatrix}1\\1\\1\\4\end{pmatrix} \right\rangle$

$W = \left\langle \begin{pmatrix}3\\2\\1\\1\end{pmatrix}, \begin{pmatrix}0\\3\\-2\\1\end{pmatrix}, \begin{pmatrix}5\\2\\3\\3\end{pmatrix}, \begin{pmatrix}1\\1\\1\\4\end{pmatrix} \right\rangle$ である。この 4 つのベクトルの 1 次独立性を調べる。

$$\begin{pmatrix}3&0&5&1\\2&3&2&1\\1&-2&3&1\\1&1&3&4\end{pmatrix} \to \begin{pmatrix}1&1&3&4\\3&0&5&1\\2&3&2&1\\1&-2&3&1\end{pmatrix} \to \begin{pmatrix}1&1&3&4\\0&-3&-4&-11\\0&1&-4&-7\\0&-3&0&-3\end{pmatrix} \to \begin{pmatrix}1&1&3&4\\0&1&-4&-7\\0&-3&-4&-11\\0&-3&0&-3\end{pmatrix}$$
$$\to \begin{pmatrix}1&0&7&11\\0&1&-4&-7\\0&0&-16&-32\\0&0&-12&-24\end{pmatrix} \to \begin{pmatrix}1&0&7&11\\0&1&-4&-7\\0&0&1&2\\0&0&-12&-24\end{pmatrix} \to \begin{pmatrix}1&0&0&-3\\0&1&0&1\\0&0&1&2\\0&0&0&0\end{pmatrix}$$

より，はじめの 3 つのベクトルが 1 次独立で，4 番目のベクトルを加えると 1 次従属とな

る。したがって基底として

$$\begin{pmatrix}3\\2\\1\\1\end{pmatrix},\begin{pmatrix}0\\3\\-2\\1\end{pmatrix},\begin{pmatrix}5\\2\\3\\3\end{pmatrix}$$

が取れ，基底が 3 個のベクトルからなるので W の次元は 3 である。

(6) $W=\left\langle\begin{pmatrix}1\\3\\-1\\2\end{pmatrix},\begin{pmatrix}4\\2\\3\\3\end{pmatrix}\right\rangle+\left\langle\begin{pmatrix}3\\2\\1\\2\end{pmatrix},\begin{pmatrix}1\\2\\-3\\0\end{pmatrix}\right\rangle$

$W=\left\langle\begin{pmatrix}1\\3\\-1\\2\end{pmatrix},\begin{pmatrix}4\\2\\3\\3\end{pmatrix},\begin{pmatrix}3\\2\\1\\2\end{pmatrix},\begin{pmatrix}1\\2\\-3\\0\end{pmatrix}\right\rangle$ である。この 4 つのベクトルの 1 次独立性を調べる。

$$\begin{pmatrix}1&4&3&1\\3&2&2&2\\-1&3&1&-3\\2&3&2&0\end{pmatrix}\to\begin{pmatrix}1&4&3&1\\0&-10&-7&-1\\0&7&4&-2\\0&-5&-4&-2\end{pmatrix}\to\begin{pmatrix}1&4&3&1\\0&1&\frac{4}{5}&\frac{2}{5}\\0&-10&-7&-1\\0&7&4&-2\end{pmatrix}$$
$$\to\begin{pmatrix}1&0&-\frac{1}{5}&-\frac{3}{5}\\0&1&\frac{4}{5}&\frac{2}{5}\\0&0&1&3\\0&0&-\frac{8}{5}&-\frac{24}{5}\end{pmatrix}\to\begin{pmatrix}1&0&0&0\\0&1&0&-2\\0&0&1&3\\0&0&0&0\end{pmatrix}$$

より，はじめの 3 つのベクトルが 1 次独立で，4 番目のベクトルを加えると 1 次従属となる。したがって基底として

$$\begin{pmatrix}1\\3\\-1\\2\end{pmatrix},\begin{pmatrix}4\\2\\3\\3\end{pmatrix},\begin{pmatrix}3\\2\\1\\2\end{pmatrix}$$

が取れ，基底が 3 個のベクトルからなるので W の次元は 3 である。

(7) $W=\left\langle\begin{pmatrix}2\\1\\3\\4\end{pmatrix},\begin{pmatrix}1\\-7\\0\\2\end{pmatrix}\right\rangle+\left\langle\begin{pmatrix}1\\3\\2\\2\end{pmatrix},\begin{pmatrix}4\\-3\\5\\8\end{pmatrix}\right\rangle$

$W=\left\langle\begin{pmatrix}2\\1\\3\\4\end{pmatrix},\begin{pmatrix}1\\-7\\0\\2\end{pmatrix},\begin{pmatrix}1\\3\\2\\2\end{pmatrix},\begin{pmatrix}4\\-3\\5\\8\end{pmatrix}\right\rangle$ である。この 4 つのベクトルの 1 次独立性を調

べる。

$$\begin{pmatrix}2&1&1&4\\1&-7&3&-3\\3&0&2&5\\4&2&2&8\end{pmatrix}\to\begin{pmatrix}1&-7&3&-3\\2&1&1&4\\3&0&2&5\\4&2&2&8\end{pmatrix}\to\begin{pmatrix}1&-7&3&-3\\0&15&-5&10\\0&21&-7&14\\0&30&-10&20\end{pmatrix}$$

$$\to\begin{pmatrix}1&-7&3&-3\\0&1&-\frac{1}{3}&\frac{2}{3}\\0&21&-7&14\\0&30&-10&20\end{pmatrix}\to\begin{pmatrix}1&0&\frac{2}{3}&\frac{5}{3}\\0&1&-\frac{1}{3}&\frac{2}{3}\\0&0&0&0\\0&0&0&0\end{pmatrix}$$

より，はじめの 2 つのベクトルが 1 次独立で，3 番目，4 番目のベクトルはそれらの 1 次結合で書ける。したがって基底として

$$\begin{pmatrix}2\\1\\3\\4\end{pmatrix},\ \begin{pmatrix}1\\-7\\0\\2\end{pmatrix}$$

が取れ，基底が 2 個のベクトルからなるので W の次元は 2 である。

(8) $W=\left\langle\begin{pmatrix}3\\5\\1\end{pmatrix}\right\rangle\cap\left\langle\begin{pmatrix}2\\2\\3\end{pmatrix}\right\rangle$

(1) で見た通り，この 2 個のベクトルは 1 次独立である。一般に $\vec{v}_1,\vec{v}_2$ が 1 次独立のとき，

$$\vec{v}\in\langle\vec{v}_1\rangle\cap\langle\vec{v}_2\rangle$$

とすると

$$\vec{v}=c_1\vec{v}_1,\ \vec{v}=c_2\vec{v}_2$$

となるスカラー c_1,c_2 が存在するが，これより

$$c_1\vec{v}_1-c_2\vec{v}_2=\vec{0}$$

となり 1 次独立性より $c_1=c_2=0$ が導かれるので，

$$\langle\vec{v}_1\rangle\cap\langle\vec{v}_2\rangle=\{\vec{0}\}$$

となる。この場合に該当するので，

$$W=\{\vec{0}\}$$

で次元は 0 である。

(9) $W=\left\langle\begin{pmatrix}2\\1\\3\end{pmatrix},\begin{pmatrix}0\\2\\-1\end{pmatrix}\right\rangle\cap\left\langle\begin{pmatrix}4\\4\\5\end{pmatrix}\right\rangle$

(2) で行った行基本変形の結果を流用する。3 番目のベクトルははじめの 2 個のベクトルの 1 次結合で表されるので，

$$\begin{pmatrix} 4 \\ 4 \\ 5 \end{pmatrix} \in \left\langle \begin{pmatrix} 2 \\ 1 \\ 3 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} 0 \\ 2 \\ -1 \end{pmatrix} \right\rangle$$

が成り立つ。したがって

$$W = \left\langle \begin{pmatrix} 2 \\ 1 \\ 3 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} 0 \\ 2 \\ -1 \end{pmatrix} \right\rangle \cap \left\langle \begin{pmatrix} 4 \\ 4 \\ 5 \end{pmatrix} \right\rangle = \left\langle \begin{pmatrix} 4 \\ 4 \\ 5 \end{pmatrix} \right\rangle$$

となって，基底として

$$\begin{pmatrix} 4 \\ 4 \\ 5 \end{pmatrix}$$

が取れ，W の次元は 1 である。

(10) $W = \left\langle \begin{pmatrix} 3 \\ 0 \\ 1 \\ 0 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} 4 \\ 2 \\ 0 \\ 3 \end{pmatrix} \right\rangle \cap \left\langle \begin{pmatrix} 2 \\ 1 \\ 1 \\ 1 \end{pmatrix} \right\rangle$

(3) で行った行基本変形の結果から，この 3 個のベクトルは 1 次独立であることがわかった。したがって (8) で行ったのと同様の議論により

$$W = \{\vec{0}\}$$

となり，W の次元は 0 である。

(11) $W = \left\langle \begin{pmatrix} 1 \\ 5 \\ 0 \\ 2 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} 3 \\ 3 \\ 1 \\ 4 \end{pmatrix} \right\rangle \cap \left\langle \begin{pmatrix} 2 \\ -3 \\ 2 \\ 2 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} 1 \\ 4 \\ 1 \\ 2 \end{pmatrix} \right\rangle$

(4) で行った基本変形の結果を流用する。上記のベクトルを順に $\vec{v}_1, \vec{v}_2, \vec{v}_3, \vec{v}_4$ とおく。基本変形により

$$x_1\vec{v}_1 + x_2\vec{v}_2 + x_3\vec{v}_3 + x_4\vec{v}_4 = \vec{0}$$

となるスカラー x_1, x_2, x_3, x_4 を求めることができて，

$$x_1 + 2x_4 = 0,\ x_2 - x_4 = 0,\ x_3 + x_4 = 0$$

となることから $x_4 = 1$ とすると $(x_1, x_2, x_3, x_4) = (-2, 1, -1, 1)$ となるので

$$-2\vec{v}_1 + \vec{v}_2 - \vec{v}_3 + \vec{v}_4 = \vec{0}$$

が得られる。これより

$$-2\vec{v}_1 + \vec{v}_2 = \vec{v}_3 - \vec{v}_4$$

となり，求める共通部分はこのベクトルで生成される。

$$-2\vec{v}_1+\vec{v}_2=-2\begin{pmatrix}1\\5\\0\\2\end{pmatrix}+\begin{pmatrix}3\\3\\1\\4\end{pmatrix}=\begin{pmatrix}1\\-7\\1\\0\end{pmatrix}$$

が W の基底で，W の次元は 1 である。

(12) $W=\left\langle\begin{pmatrix}3\\2\\1\\1\end{pmatrix},\begin{pmatrix}0\\3\\-2\\1\end{pmatrix}\right\rangle\cap\left\langle\begin{pmatrix}5\\2\\3\\3\end{pmatrix},\begin{pmatrix}1\\1\\1\\4\end{pmatrix}\right\rangle$

(5) で行った基本変形の結果を流用する。上記のベクトルを順に $\vec{v}_1,\vec{v}_2,\vec{v}_3,\vec{v}_4$ とおく。基本変形により

$$x_1\vec{v}_1+x_2\vec{v}_2+x_3\vec{v}_3+x_4\vec{v}_4=\vec{0}$$

となるスカラー x_1,x_2,x_3,x_4 を求めることができて，

$$x_1-3x_4=0,\ x_2+x_4=0,\ x_3+2x_4=0$$

となることから $x_4=1$ とすると $(x_1,x_2,x_3,x_4)=(3,-1,-2,1)$ となるので

$$3\vec{v}_1-\vec{v}_2-2\vec{v}_3+\vec{v}_4=\vec{0}$$

が得られる。これより

$$3\vec{v}_1-\vec{v}_2=2\vec{v}_3-\vec{v}_4$$

となり，求める共通部分はこのベクトルで生成される。

$$3\vec{v}_1-\vec{v}_2=3\begin{pmatrix}3\\2\\1\\1\end{pmatrix}-\begin{pmatrix}0\\3\\-2\\1\end{pmatrix}=\begin{pmatrix}9\\3\\5\\2\end{pmatrix}$$

が W の基底で，W の次元は 1 である。

(13) $W=\left\langle\begin{pmatrix}1\\3\\-1\\2\end{pmatrix},\begin{pmatrix}4\\2\\3\\3\end{pmatrix}\right\rangle\cap\left\langle\begin{pmatrix}3\\2\\1\\2\end{pmatrix},\begin{pmatrix}1\\2\\-3\\0\end{pmatrix}\right\rangle$

(6) で行った基本変形の結果を流用する。上記のベクトルを順に $\vec{v}_1,\vec{v}_2,\vec{v}_3,\vec{v}_4$ とおく。基本変形により

$$x_1\vec{v}_1+x_2\vec{v}_2+x_3\vec{v}_3+x_4\vec{v}_4=\vec{0}$$

となるスカラー x_1,x_2,x_3,x_4 を求めることができて，

$$x_1=0,\ x_2-2x_4=0,\ x_3+3x_4=0$$

となることから $x_4 = 1$ とすると $(x_1, x_2, x_3, x_4) = (0, 2, -3, 1)$ となるので

$$2\vec{v}_2 - 3\vec{v}_3 + \vec{v}_4 = \vec{0}$$

が得られる。これより

$$2\vec{v}_2 = 3\vec{v}_3 - \vec{v}_4$$

となり，求める共通部分はこのベクトルで生成されるが，したがって特に $\vec{v}_2$ で生成される。よって

$$\begin{pmatrix} 4 \\ 2 \\ 3 \\ 3 \end{pmatrix}$$

が W の基底で，W の次元は 1 である。

(14) $W = \left\langle \begin{pmatrix} 2 \\ 1 \\ 3 \\ 4 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} 1 \\ -7 \\ 0 \\ 2 \end{pmatrix} \right\rangle \cap \left\langle \begin{pmatrix} 1 \\ 3 \\ 2 \\ 2 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} 4 \\ -3 \\ 5 \\ 8 \end{pmatrix} \right\rangle$

(7) の結果を流用する。上記のベクトルを順に $\vec{v}_1, \vec{v}_2, \vec{v}_3, \vec{v}_4$ とおくと，(7) では $\vec{v}_3, \vec{v}_4$ が $\vec{v}_1, \vec{v}_2$ の 1 次結合で書けることを見た。また $\vec{v}_1, \vec{v}_2$ は 1 次独立，$\vec{v}_3, \vec{v}_4$ も 1 次独立であるので，

$$\langle \vec{v}_1, \vec{v}_2 \rangle = \langle \vec{v}_3, \vec{v}_4 \rangle$$

であることがわかる。したがって W はこの部分空間に一致し，基底としてたとえば

$$\begin{pmatrix} 2 \\ 1 \\ 3 \\ 4 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} 1 \\ -7 \\ 0 \\ 2 \end{pmatrix}$$

が取れる。W の次元は 2 である。