§3 部分空間　演習問題 2

✐ 問題の難易度の目安【基礎】★☆☆　　【標準】★★☆　　【発展】★★★

$\boxed{\mathbf{1}}$ (★☆☆)(**部分空間①**)

以下の W は $\mathbb{R}^3$ の部分空間となることを示せ：

$$W = \left\{ \boldsymbol{x} = \begin{pmatrix} x \\ y \\ z \end{pmatrix} \in \mathbb{R}^3 : x + y + z = 0 \right\}.$$

$\boxed{\mathbf{2}}$ (★★☆)(**生成系**)

$\mathbb{R}^n$ のベクトル $\boldsymbol{a}_1,\, \boldsymbol{a}_2, \ldots, \boldsymbol{a}_r$ が**張る部分空間**を

$$\mathrm{span}\,\{\boldsymbol{a}_1,\, \boldsymbol{a}_2, \ldots, \boldsymbol{a}_r\} := \{x_1\boldsymbol{a}_1 + x_2\boldsymbol{a}_2 + \cdots + x_r\boldsymbol{a}_r \,:\, x_1,\, x_2, \ldots, x_r \in \mathbb{R}\}$$

で表す．$\mathrm{span}\,\{\boldsymbol{a}_1,\, \boldsymbol{a}_2, \ldots, \boldsymbol{a}_r\}$ は $\boldsymbol{a}_1,\, \boldsymbol{a}_2, \ldots, \boldsymbol{a}_r$ の 1 次結合全体からなる $\mathbb{R}^n$ の部分空間である．$W = \mathrm{span}\,\{\boldsymbol{a}_1,\, \boldsymbol{a}_2, \ldots, \boldsymbol{a}_r\}$ のとき，ベクトルの組 $\{\boldsymbol{a}_1,\, \boldsymbol{a}_2, \ldots, \boldsymbol{a}_r\}$ を W の**生成系**という．このとき，次のベクトルの組はいずれも $\mathbb{R}^2$ の生成系となることを示せ．

(1) $\left\{ \boldsymbol{a}_1 = \begin{pmatrix} 0 \\ -1 \end{pmatrix},\, \boldsymbol{a}_2 = \begin{pmatrix} 3 \\ 0 \end{pmatrix} \right\}.$

(2) $\left\{ \boldsymbol{a}_1 = \begin{pmatrix} 1 \\ 1 \end{pmatrix},\, \boldsymbol{a}_2 = \begin{pmatrix} 1 \\ 2 \end{pmatrix},\, \boldsymbol{a}_3 = \begin{pmatrix} 1 \\ 4 \end{pmatrix} \right\}.$

$\boxed{\mathbf{3}}$ (★★☆)(**部分空間②**)

$\mathbb{R}^3$ で $W_1 := \mathrm{span}\,\{\boldsymbol{e}_1,\, \boldsymbol{e}_2\}$，$W_2 := \mathrm{span}\,\{\boldsymbol{e}_2,\, \boldsymbol{e}_3\}$ とするとき，次の部分空間を求めよ．ただし，$\boldsymbol{e}_1 := \begin{pmatrix} 1 \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix},\, \boldsymbol{e}_2 := \begin{pmatrix} 0 \\ 1 \\ 0 \end{pmatrix},\, \boldsymbol{e}_3 := \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ 1 \end{pmatrix}$ は $\mathbb{R}^3$ の基本ベクトルである．

(1) $W_1 + W_2.$

(2) $W_1 \cap W_2.$

$\boxed{\mathbf{4}}$ (★★☆)(**直和**)

$\mathbb{R}^3$ で

$$W_1 := \mathrm{span}\left\{ \begin{pmatrix} 2 \\ -1 \\ 3 \end{pmatrix},\, \begin{pmatrix} 1 \\ 0 \\ 4 \end{pmatrix} \right\}, \quad W_2 := \mathrm{span}\left\{ \begin{pmatrix} 5 \\ 2 \\ 6 \end{pmatrix} \right\}$$

とするとき，$W_1 + W_2$ は直和であることを示せ．