

部分空間 演習問題 1

問 1. 以下の W は \mathbb{R}^2 の部分空間ではない. 理由をそれぞれ述べよ.

(i)

$$W = \left\{ \mathbf{x} = \begin{bmatrix} x \\ y \end{bmatrix} \in \mathbb{R}^2 \mid x - y = 1 \right\}$$

(ii)

$$W = \left\{ \mathbf{x} = \begin{bmatrix} x \\ y \end{bmatrix} \in \mathbb{R}^2 \mid y \geq 0 \right\}$$

(iii)

$$W = \left\{ \mathbf{x} = \begin{bmatrix} x \\ y \end{bmatrix} \in \mathbb{R}^2 \mid xy \geq 0 \right\}$$

問 2. $\mathbf{a}_1, \mathbf{a}_2, \dots, \mathbf{a}_r \in \mathbb{R}^n$ とするとき, $\mathbf{a}_1, \mathbf{a}_2, \dots, \mathbf{a}_r$ の 1 次結合全体からなる集合,

$$\{x_1\mathbf{a}_1 + x_2\mathbf{a}_2 + \dots + x_r\mathbf{a}_r \mid x_1, x_2, \dots, x_r \in \mathbb{R}\}$$

を, $\langle \mathbf{a}_1, \mathbf{a}_2, \dots, \mathbf{a}_r \rangle$ と表す. $\langle \mathbf{a}_1, \mathbf{a}_2, \dots, \mathbf{a}_r \rangle$ は, \mathbb{R}^n の部分空間であることを示せ.

問 3. A を $m \times n$ 行列とし, W を同次連立 1 次方程式 $A\mathbf{x} = \mathbf{o}$ の解空間とする. すなわち

$$W = \{\mathbf{x} \in \mathbb{R}^n \mid A\mathbf{x} = \mathbf{o}\}$$

とする. W は, \mathbb{R}^n の部分空間であることを示せ.