§3 部分空間　演習問題 2　解答

問題の難易度の目安【基礎】★☆☆　【標準】★★☆　【発展】★★★

1 (★☆☆)(部分空間①)

以下の W は $\mathbb{R}^3$ の部分空間となることを示せ：

$$W = \left\{ \boldsymbol{x} = \begin{pmatrix} x \\ y \\ z \end{pmatrix} \in \mathbb{R}^3 : x + y + z = 0 \right\}.$$

解 定義より明らかに，零ベクトル $\boldsymbol{o}$ は W に属する．次に，$\boldsymbol{x} = \begin{pmatrix} x_1 \\ x_2 \\ x_3 \end{pmatrix}$, $\boldsymbol{y} = \begin{pmatrix} y_1 \\ y_2 \\ y_3 \end{pmatrix} \in W$ に対して，$\boldsymbol{x} + \boldsymbol{y} = \begin{pmatrix} x_1 + y_1 \\ x_2 + y_2 \\ x_3 + y_3 \end{pmatrix}$ であり，成分の和は

$$(x_1 + y_1) + (x_2 + y_2) + (x_3 + y_3) = (x_1 + x_2 + x_3) + (y_1 + y_2 + y_3) = 0$$

であるから，$\boldsymbol{x} + \boldsymbol{y} \in W$．

さらに，$\boldsymbol{x} = \begin{pmatrix} x_1 \\ x_2 \\ x_3 \end{pmatrix} \in W$ およびスカラー $\lambda \in \mathbb{R}$ に対して $\lambda\boldsymbol{x} = \begin{pmatrix} \lambda x_1 \\ \lambda x_2 \\ \lambda x_3 \end{pmatrix}$ であり，

$$\lambda x_1 + \lambda x_2 + \lambda x_3 = \lambda (x_1 + x_2 + x_3) = 0$$

となるから，$\lambda\boldsymbol{x} \in W$ となる．

以上より，W は $\mathbb{R}^3$ の部分空間である．■

2 (★★☆)(生成系)

$\mathbb{R}^n$ のベクトル $\boldsymbol{a}_1, \boldsymbol{a}_2, \dots, \boldsymbol{a}_r$ が**張る部分空間**を

$$\mathrm{span}\{\boldsymbol{a}_1, \boldsymbol{a}_2, \dots, \boldsymbol{a}_r\} := \{x_1\boldsymbol{a}_1 + x_2\boldsymbol{a}_2 + \cdots + x_r\boldsymbol{a}_r \ : \ x_1, x_2, \dots, x_r \in \mathbb{R}\}$$

で表す．$\mathrm{span}\{\boldsymbol{a}_1, \boldsymbol{a}_2, \dots, \boldsymbol{a}_r\}$ は $\boldsymbol{a}_1, \boldsymbol{a}_2, \dots, \boldsymbol{a}_r$ の 1 次結合全体からなる $\mathbb{R}^n$ の部分空間である．$W = \mathrm{span}\{\boldsymbol{a}_1, \boldsymbol{a}_2, \dots, \boldsymbol{a}_r\}$ のとき，ベクトルの組 $\{\boldsymbol{a}_1, \boldsymbol{a}_2, \dots, \boldsymbol{a}_r\}$ を W の**生成系**という．このとき，次のベクトルの組はいずれも $\mathbb{R}^2$ の生成系となることを示せ．

(1) $\left\{ \boldsymbol{a}_1 = \begin{pmatrix} 0 \\ -1 \end{pmatrix}, \boldsymbol{a}_2 = \begin{pmatrix} 3 \\ 0 \end{pmatrix} \right\}.$

(2) $\left\{ \boldsymbol{a}_1 = \begin{pmatrix} 1 \\ 1 \end{pmatrix}, \boldsymbol{a}_2 = \begin{pmatrix} 1 \\ 2 \end{pmatrix}, \boldsymbol{a}_3 = \begin{pmatrix} 1 \\ 4 \end{pmatrix} \right\}$.

解 (1) $\mathbb{R}^2 = \mathrm{span}\,\{\boldsymbol{a}_1, \boldsymbol{a}_2\}$ となることを示せばよい．$\mathbb{R}^2$ の任意のベクトル $\boldsymbol{x} = \begin{pmatrix} x \\ y \end{pmatrix}$ は

$$\begin{pmatrix} x \\ y \end{pmatrix} = -y \begin{pmatrix} 0 \\ -1 \end{pmatrix} + \frac{x}{3} \begin{pmatrix} 3 \\ 0 \end{pmatrix} \iff \boldsymbol{x} = -y\boldsymbol{a}_1 + \frac{x}{3}\boldsymbol{a}_2$$

と表されるから，$\boldsymbol{x} \in \mathrm{span}\,\{\boldsymbol{a}_1, \boldsymbol{a}_2\}$．すなわち，$\mathbb{R}^2 \subset \mathrm{span}\,\{\boldsymbol{a}_1, \boldsymbol{a}_2\}$．逆に，$\mathbb{R}^2 \supset \mathrm{span}\,\{\boldsymbol{a}_1, \boldsymbol{a}_2\}$ であることは明らか[1]だから，以上より $\mathbb{R}^2 = \mathrm{span}\,\{\boldsymbol{a}_1, \boldsymbol{a}_2\}$．

(2) $\mathbb{R}^2$ の任意のベクトル $\boldsymbol{x} = \begin{pmatrix} x \\ y \end{pmatrix}$ が

$$\begin{pmatrix} x \\ y \end{pmatrix} = s \begin{pmatrix} 1 \\ 1 \end{pmatrix} + t \begin{pmatrix} 1 \\ 2 \end{pmatrix} + u \begin{pmatrix} 1 \\ 4 \end{pmatrix} \quad \cdots\cdots \circledast$$

と表されるように，s, t, u を決定する[2]．上式より $\begin{cases} x = s + t + u \cdots ① \\ y = s + 2t + 4u \end{cases}$ である．s を消去して，$y - x = t + 3u$ すなわち，$t = y - x - 3u \cdots ②$．②を①へ代入して $x = s + y - x - 2u$ すなわち，$s = 2x - y + 2u \cdots ③$．②,③を$\circledast$へ代入すれば

$$\begin{pmatrix} x \\ y \end{pmatrix} = (2x - y + 2u) \begin{pmatrix} 1 \\ 1 \end{pmatrix} + (y - x - 3u) \begin{pmatrix} 1 \\ 2 \end{pmatrix} + u \begin{pmatrix} 1 \\ 4 \end{pmatrix} \quad (u : \text{任意})$$

$$\iff \boldsymbol{x} = (2x - y + 2u)\boldsymbol{a}_1 + (y - x - 3u)\boldsymbol{a}_2 + u\boldsymbol{a}_3 \quad \cdots ④.$$

ゆえに，$\boldsymbol{x} \in \mathrm{span}\,\{\boldsymbol{a}_1, \boldsymbol{a}_2, \boldsymbol{a}_3\}$ である．すなわち，$\mathbb{R}^3 \subset \mathrm{span}\,\{\boldsymbol{a}_1, \boldsymbol{a}_2, \boldsymbol{a}_3\}$ が示された．逆向きの包含は明らかなので，これで証明終わり． ∎

3 (★★☆)(部分空間②)

$\mathbb{R}^3$ で $W_1 := \mathrm{span}\,\{\boldsymbol{e}_1, \boldsymbol{e}_2\}$，$W_2 := \mathrm{span}\,\{\boldsymbol{e}_2, \boldsymbol{e}_3\}$ とするとき，次の部分空間を求めよ．ただし，$\boldsymbol{e}_1 := \begin{pmatrix} 1 \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix}, \boldsymbol{e}_2 := \begin{pmatrix} 0 \\ 1 \\ 0 \end{pmatrix}, \boldsymbol{e}_3 := \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ 1 \end{pmatrix}$ は $\mathbb{R}^3$ の基本ベクトルである．

(1) $W_1 + W_2$.

(2) $W_1 \cap W_2$.

[1] 明らかに思えない人のためにここに記述しておこう．$\boldsymbol{x} \in \mathrm{span}\,\{\boldsymbol{a}_1, \boldsymbol{a}_2\}$ を任意にとると，$\boldsymbol{x} = \lambda_1\boldsymbol{a}_1 + \lambda_2\boldsymbol{a}_2$ $(\lambda_1, \lambda_2 \in \mathbb{R})$ と表される．右辺は明らかに $\mathbb{R}^2$ に属するので，$\boldsymbol{x} \in \mathbb{R}^2$．ゆえに，$\mathbb{R}^2 \supset \mathrm{span}\,\{\boldsymbol{a}_1, \boldsymbol{a}_2\}$.

[2] s, t, u を x, y で表すことを目標にする．ただし，未知数 s, t, u の 3 つに対して，2 本しか式がないので，どれか一つは任意にとれることになる．

解 (1)　W_1 の任意のベクトル $x\boldsymbol{e}_1 + y\boldsymbol{e}_2$ および W_2 の任意のベクトル $s\boldsymbol{e}_2 + t\boldsymbol{e}_3$ に対して，

$$(x\boldsymbol{e}_1 + y\boldsymbol{e}_2) + (s\boldsymbol{e}_2 + t\boldsymbol{e}_3) = \begin{pmatrix} x \\ y+s \\ t \end{pmatrix}$$

であり，これは $\mathbb{R}^3$ 全体を動くから，$W_1 + W_2 = \mathbb{R}^3$.

(2)　$W_1 \cap W_2$ の任意のベクトル $\boldsymbol{z}$ は $\boldsymbol{z} = x\boldsymbol{e}_1 + y\boldsymbol{e}_2 = s\boldsymbol{e}_2 + t\boldsymbol{e}_3$ と 2 通りに表現される．したがって，両辺を比較して

$$\begin{pmatrix} x \\ y \\ 0 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0 \\ s \\ t \end{pmatrix} \iff x = t = 0, \quad y = s.$$

よって，$W_1 \cap W_2$ は $\boldsymbol{z} = y\boldsymbol{e}_2 = \begin{pmatrix} 0 \\ y \\ 0 \end{pmatrix}$ の形のベクトル全体だから，y 軸を表す. ■

4 (★★☆)(直和)

$\mathbb{R}^3$ で

$$W_1 := \mathrm{span}\left\{ \begin{pmatrix} 2 \\ -1 \\ 3 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} 1 \\ 0 \\ 4 \end{pmatrix} \right\}, \quad W_2 := \mathrm{span}\left\{ \begin{pmatrix} 5 \\ 2 \\ 6 \end{pmatrix} \right\}$$

とするとき，$W_1 + W_2$ は直和であることを示せ.

解 $W_1 + W_2$ が直和であることを示すには，$W_1 \cap W_2 = \{\boldsymbol{o}\}$ であることを示せばよい．$\boldsymbol{x} \in W_1 \cap W_2$ とすると，$\boldsymbol{x} \in W_1$ かつ $\boldsymbol{x} \in W_2$ であるから，

$$\boldsymbol{x} = s\begin{pmatrix} 2 \\ -1 \\ 3 \end{pmatrix} + t\begin{pmatrix} 1 \\ 0 \\ 4 \end{pmatrix} = u\begin{pmatrix} 5 \\ 2 \\ 6 \end{pmatrix}$$

と 2 通りに表される．成分を比較して，s, t, u に関する同次連立 1 次方程式

$$\begin{cases} 2s + t - 5u = 0 \\ -s - 2u = 0 \\ 3s + 4t - 6u = 0 \end{cases}$$

を得る．係数行列は (行基本変形による) 簡約化によって，$\begin{pmatrix} 2 & 1 & -5 \\ -1 & 0 & -2 \\ 3 & 4 & -6 \end{pmatrix} \to \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix}$ となるから，この同次連立 1 次方程式は自明解 $s = t = u = 0$ のみしか持たない．すなわち，$\boldsymbol{x} = \boldsymbol{o}$ である．よって，$W_1 \cap W_2 = \{\boldsymbol{o}\}$ となり，確かに $W_1 + W_2$ は直和である. ■