部分空間　演習問題１　解答

問 1. 以下の W は $\mathbb{R}^2$ の部分空間ではない．理由をそれぞれ述べよ．

(i)

$$W = \left\{ \boldsymbol{x} = \begin{bmatrix} x \\ y \end{bmatrix} \in \mathbb{R}^2 \,\middle|\, x - y = 1 \right\}$$

解答． $\mathbb{R}^2$ の零ベクトル $\boldsymbol{o} = \begin{bmatrix} 0 \\ 0 \end{bmatrix}$ について，$0 - 0 = 0 \neq 1$ であるから，$\boldsymbol{o} \notin W$ である．したがって W は $\mathbb{R}^2$ の部分空間ではない． ■

(ii)

$$W = \left\{ \boldsymbol{x} = \begin{bmatrix} x \\ y \end{bmatrix} \in \mathbb{R}^2 \,\middle|\, y \geq 0 \right\}$$

解答． $\boldsymbol{a} = \begin{bmatrix} 0 \\ 1 \end{bmatrix}$ とする．$1 \geq 0$ より $\boldsymbol{a} \in W$ であるが，$(-1)\boldsymbol{a} = \begin{bmatrix} 0 \\ -1 \end{bmatrix}$ であって，$-1 < 0$ より $(-1)\boldsymbol{a} \notin W$ である．したがって W は $\mathbb{R}^2$ の部分空間ではない． ■

(iii)

$$W = \left\{ \boldsymbol{x} = \begin{bmatrix} x \\ y \end{bmatrix} \in \mathbb{R}^2 \,\middle|\, xy \geq 0 \right\}$$

解答． $\boldsymbol{a} = \begin{bmatrix} 1 \\ 0 \end{bmatrix}$, $\boldsymbol{b} = \begin{bmatrix} 0 \\ -1 \end{bmatrix}$ とする．$1 \cdot 0 = 0 \geq 0$, $0 \cdot (-1) = 0 \geq 0$ より，$\boldsymbol{a}, \boldsymbol{b} \in W$ であるが，$\boldsymbol{a} + \boldsymbol{b} = \begin{bmatrix} 1 \\ -1 \end{bmatrix}$ であって，$1 \cdot (-1) = -1 < 0$ より $\boldsymbol{a} + \boldsymbol{b} \notin W$ とわかる．したがって W は $\mathbb{R}^2$ の部分空間ではない． ■

問 2. $\boldsymbol{a}_1, \boldsymbol{a}_2, \ldots, \boldsymbol{a}_r \in \mathbb{R}^n$ とするとき，$\boldsymbol{a}_1, \boldsymbol{a}_2, \ldots, \boldsymbol{a}_r$ の 1 次結合全体からなる集合，

$$\{x_1\boldsymbol{a}_1 + x_2\boldsymbol{a}_2 + \cdots + x_r\boldsymbol{a}_r \mid x_1, x_2, \ldots, x_r \in \mathbb{R}\}$$

を，$\langle \boldsymbol{a}_1, \boldsymbol{a}_2, \ldots, \boldsymbol{a}_r \rangle$ と表す．$\langle \boldsymbol{a}_1, \boldsymbol{a}_2, \ldots, \boldsymbol{a}_r \rangle$ は，$\mathbb{R}^n$ の部分空間であることを示せ．

解答． $\boldsymbol{x}, \boldsymbol{y} \in \langle \boldsymbol{a}_1, \boldsymbol{a}_2, \ldots, \boldsymbol{a}_r \rangle$, $k, \ell \in \mathbb{R}$ とする．このとき $k\boldsymbol{x} + \ell\boldsymbol{y} \in \langle \boldsymbol{a}_1, \boldsymbol{a}_2, \ldots, \boldsymbol{a}_r \rangle$ となることを示せばよい．$\boldsymbol{x}, \boldsymbol{y} \in \langle \boldsymbol{a}_1, \boldsymbol{a}_2, \ldots, \boldsymbol{a}_r \rangle$ より，$\boldsymbol{x}$ と $\boldsymbol{y}$ はある $x_1, x_2, \ldots, x_r, y_1, y_2, \ldots, y_r \in \mathbb{R}$ を用いて

$$\begin{aligned} \boldsymbol{x} &= x_1\boldsymbol{a}_1 + x_2\boldsymbol{a}_2 + \cdots + x_r\boldsymbol{a}_r, \\ \boldsymbol{y} &= y_1\boldsymbol{a}_1 + y_2\boldsymbol{a}_2 + \cdots + y_r\boldsymbol{a}_r \end{aligned}$$

と表される．したがって，

$$\begin{aligned} k\boldsymbol{x} + \ell\boldsymbol{y} &= k(x_1\boldsymbol{a}_1 + x_2\boldsymbol{a}_2 + \cdots + x_r\boldsymbol{a}_r) + \ell(y_1\boldsymbol{a}_1 + y_2\boldsymbol{a}_2 + \cdots + y_r\boldsymbol{a}_r) \\ &= (kx_1 + \ell y_1)\boldsymbol{a}_1 + (kx_2 + \ell y_2)\boldsymbol{a}_2 + \cdots + (kx_r + \ell y_r)\boldsymbol{a}_r \in \langle \boldsymbol{a}_1, \boldsymbol{a}_2, \ldots, \boldsymbol{a}_r \rangle. \end{aligned}$$

よって，$\langle \boldsymbol{a}_1, \boldsymbol{a}_2, \ldots, \boldsymbol{a}_r \rangle$ は $\mathbb{R}^n$ の部分空間である． ■

問 3. A を $m \times n$ 行列とし，W を同次連立 1 次方程式 $A\boldsymbol{x} = \boldsymbol{o}$ の解空間とする．すなわち

$$W = \{\boldsymbol{x} \in \mathbb{R}^n \mid A\boldsymbol{x} = \boldsymbol{o}\}$$

とする．W は，$\mathbb{R}^n$ の部分空間であることを示せ．

解答. $\boldsymbol{x}, \boldsymbol{y} \in W$, $k, \ell \in \mathbb{R}$ とする．このとき $k\boldsymbol{x} + \ell\boldsymbol{y} \in W$ となることを示せばよい．$\boldsymbol{x}, \boldsymbol{y} \in W$ であるから，$A\boldsymbol{x} = \boldsymbol{o}$, $A\boldsymbol{y} = \boldsymbol{o}$ が成り立つ．よって

$$A(k\boldsymbol{x} + \ell\boldsymbol{y}) = A(k\boldsymbol{x}) + A(\ell\boldsymbol{y}) = k(A\boldsymbol{x}) + \ell(A\boldsymbol{y}) = k\boldsymbol{o} + \ell\boldsymbol{o} = \boldsymbol{o},$$

すなわち，$k\boldsymbol{x} + \ell\boldsymbol{y} \in W$ とわかる．したがって W は $\mathbb{R}^n$ の部分空間となる． ■

Point

$W \subset \mathbb{R}^n$ が $\mathbb{R}^n$ の部分空間であるとは，以下の 3 つの条件をみたすことである．

(S0) $\boldsymbol{o} \in W$．（$\boldsymbol{o}$ は $\mathbb{R}^n$ の零ベクトル）
(S1) $\boldsymbol{a}, \boldsymbol{b} \in W$ ならば，$\boldsymbol{a} + \boldsymbol{b} \in W$.
(S2) $\boldsymbol{a} \in W$, $k \in \mathbb{R}$ ならば，$k\boldsymbol{a} \in W$.

$W \neq \emptyset$ のときは，(S2) から (S0) が導かれることにも注意せよ．また，(S1)(S2) は 1 つにまとめて以下の条件と置き換えられる．

(S3) $\boldsymbol{a}, \boldsymbol{b} \in W$, $k, \ell \in \mathbb{R}$ ならば，$k\boldsymbol{a} + \ell\boldsymbol{b} \in W$.

$W \subset \mathbb{R}^n$ が $\mathbb{R}^n$ の部分空間であることを示すためには，(S0), (S1) と (S2)（もしくは (S3)）が成り立つことを確かめればよく，W が $\mathbb{R}^n$ の部分空間でないことを示すためには，(S0)∼(S3) のいずれかが成立しないこと，例えば反例を挙げればよい．