１次独立・１次従属　演習問題３　解答例

問題 1.

$$\boldsymbol{a}_1 = \begin{bmatrix} 4 \\ 2 \\ 0 \\ 2 \\ 1 \end{bmatrix}, \quad \boldsymbol{a}_2 = \begin{bmatrix} -2 \\ 1 \\ 1 \\ 3 \\ 0 \end{bmatrix}, \quad \boldsymbol{a}_3 = \begin{bmatrix} -1 \\ 1 \\ 3 \\ 2 \\ 0 \end{bmatrix}, \quad \boldsymbol{b} = \begin{bmatrix} 7 \\ 6 \\ 8 \\ 5 \\ 4 \end{bmatrix}$$

とする．このとき $\boldsymbol{b}$ が $\boldsymbol{a}_1, \boldsymbol{a}_2, \boldsymbol{a}_3$ の 1 次結合で表されるかどうか調べよ．

解答. 等式 $\boldsymbol{b} = c_1\boldsymbol{a}_1 + c_2\boldsymbol{a}_2 + c_3\boldsymbol{a}_3$ は,

$$A = [\boldsymbol{a}_1, \boldsymbol{a}_2, \boldsymbol{a}_3], \quad \boldsymbol{c} = \begin{bmatrix} c_1 \\ c_2 \\ c_3 \end{bmatrix}$$

とおけば，$\boldsymbol{b} = A\boldsymbol{c}$ と書き直せる．したがって,

連立 1 次方程式 $A\boldsymbol{x} = \boldsymbol{b}$ が解をもつ $\Leftrightarrow$ $\boldsymbol{b}$ は $\boldsymbol{a}_1, \boldsymbol{a}_2, \boldsymbol{a}_3$ の 1 次結合で表される

となる．$A\boldsymbol{x} = \boldsymbol{b}$ の拡大係数行列を基本変形していくと

$$[A, \boldsymbol{b}] = [\boldsymbol{a}_1, \boldsymbol{a}_2, \boldsymbol{a}_3, \boldsymbol{b}] = \begin{bmatrix} 4 & -2 & -1 & 7 \\ 2 & 1 & 1 & 6 \\ 0 & 1 & 3 & 8 \\ 2 & 3 & 2 & 5 \\ 1 & 0 & 0 & 4 \end{bmatrix} \to \cdots \to \begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 & 2 \\ 0 & 1 & 0 & -1 \\ 0 & 0 & 1 & 3 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \end{bmatrix}$$

となるので，$A\boldsymbol{x} = \boldsymbol{b}$ は，ただ 1 つの解

$$\boldsymbol{x} = \begin{bmatrix} 2 \\ -1 \\ 3 \end{bmatrix}$$

をもつことがわかる．よって $\boldsymbol{b}$ は

$$\boldsymbol{b} = 2\boldsymbol{a}_1 - \boldsymbol{a}_2 + \boldsymbol{a}_3$$

と表される[*1]．■

問題 2.　(i)

$$\boldsymbol{a}_1 = \begin{bmatrix} 1 \\ 2 \\ 3 \\ 2 \end{bmatrix}, \quad \boldsymbol{a}_2 = \begin{bmatrix} 0 \\ 2 \\ 0 \\ 1 \end{bmatrix}, \quad \boldsymbol{a}_3 = \begin{bmatrix} 0 \\ 1 \\ 1 \\ 1 \end{bmatrix}$$

とする．このとき $\{\boldsymbol{a}_1, \boldsymbol{a}_2, \boldsymbol{a}_3\}$ は 1 次独立か 1 次従属か調べよ．

解答. 等式

$$c_1\boldsymbol{a}_1 + c_2\boldsymbol{a}_2 + c_3\boldsymbol{a}_3 = \boldsymbol{o} \tag{2.1}$$

[*1] 実際に検算してみるとよい．

を考える．この等式 (2.1) が成立するのは $c_1 = c_2 = c_3 = 0$ のときに限るならば $\{\boldsymbol{a}_1, \boldsymbol{a}_2, \boldsymbol{a}_3\}$ は 1 次独立であり，そうでなければ 1 次従属である．また，等式 (2.1) は

$$[\boldsymbol{a}_1, \boldsymbol{a}_2, \boldsymbol{a}_3] \begin{bmatrix} c_1 \\ c_2 \\ c_3 \end{bmatrix} = \boldsymbol{o}$$

と書き直せる．よって

連立 1 次方程式 $[\boldsymbol{a}_1, \boldsymbol{a}_2, \boldsymbol{a}_3]\boldsymbol{x} = \boldsymbol{o}$ の解は $\boldsymbol{x} = \boldsymbol{o}$ のみ $\Leftrightarrow$ $\{\boldsymbol{a}_1, \boldsymbol{a}_2, \boldsymbol{a}_3\}$ は 1 次独立

だとわかる．連立 1 次方程式 $[\boldsymbol{a}_1, \boldsymbol{a}_2, \boldsymbol{a}_3]\boldsymbol{x} = \boldsymbol{o}$ の係数行列 $[\boldsymbol{a}_1, \boldsymbol{a}_2, \boldsymbol{a}_3]$ を行基本変形していくと[*2]

$$[\boldsymbol{a}_1, \boldsymbol{a}_2, \boldsymbol{a}_3] = \begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 2 & 2 & 1 \\ 3 & 0 & 1 \\ 2 & 1 & 1 \end{bmatrix} \to \cdots \to \begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \\ 0 & 0 & 0 \end{bmatrix}$$

とわかるので，$[\boldsymbol{a}_1, \boldsymbol{a}_2, \boldsymbol{a}_3]\boldsymbol{x} = \boldsymbol{o}$ の解は $\boldsymbol{x} = \boldsymbol{o}$ のみとわかる．以上より，$\{\boldsymbol{a}_1, \boldsymbol{a}_2, \boldsymbol{a}_3\}$ は 1 次独立である． ■

(ii)

$$\boldsymbol{a}_1 = \begin{bmatrix} 1 \\ 2 \\ 1 \end{bmatrix}, \quad \boldsymbol{a}_2 = \begin{bmatrix} 0 \\ 1 \\ 1 \end{bmatrix}, \quad \boldsymbol{a}_3 = \begin{bmatrix} 3 \\ 8 \\ 5 \end{bmatrix}$$

とする．このとき $\{\boldsymbol{a}_1, \boldsymbol{a}_2, \boldsymbol{a}_3\}$ は 1 次独立か 1 次従属か調べよ．

解答． 連立 1 次方程式

$$[\boldsymbol{a}_1, \boldsymbol{a}_2, \boldsymbol{a}_3] \begin{bmatrix} x_1 \\ x_2 \\ x_3 \end{bmatrix} = \boldsymbol{o} \tag{2.2}$$

を考える．係数行列を行基本変形していくと

$$[\boldsymbol{a}_1, \boldsymbol{a}_2, \boldsymbol{a}_3] = \begin{bmatrix} 1 & 0 & 3 \\ 2 & 1 & 8 \\ 1 & 1 & 5 \end{bmatrix} \to \cdots \to \begin{bmatrix} 1 & 0 & 3 \\ 0 & 1 & 2 \\ 0 & 0 & 0 \end{bmatrix}$$

とわかるので，連立 1 次方程式 (2.2) 解は

$$\begin{bmatrix} 1 & 0 & 3 \\ 0 & 1 & 2 \\ 0 & 0 & 0 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} x_1 \\ x_2 \\ x_3 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 0 \\ 0 \\ 0 \end{bmatrix}, \quad \text{すなわち} \quad \begin{cases} x_1 \phantom{{}+x_2} + 3x_3 = 0 \\ \phantom{x_1 + {}} x_2 + 2x_3 = 0 \end{cases}$$

の解と等しい．よって $x_3 = c$ とすれば連立 1 次方程式 (2.2) の解は

$$\begin{bmatrix} x_1 \\ x_2 \\ x_3 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} -3c \\ -2c \\ c \end{bmatrix} = c \begin{bmatrix} -3 \\ -2 \\ 1 \end{bmatrix} \quad (c \text{ は任意定数})$$

[*2] 拡大係数行列 $[\boldsymbol{a}_1, \boldsymbol{a}_2, \boldsymbol{a}_3, \boldsymbol{o}]$ を行基本変形してももちろんよいが，どんな行基本変形をしても定数項ベクトルに対応する最後の列が $\boldsymbol{o}$ であることは変わらないので，省略して係数行列のみを変形していけばよい．

とわかる．とくに $c=1$ の場合を考えると

$$\begin{bmatrix} x_1 \\ x_2 \\ x_3 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} -3 \\ -2 \\ 1 \end{bmatrix}$$

が 1 つの解だとわかるが，これは

$$[\boldsymbol{a}_1, \boldsymbol{a}_2, \boldsymbol{a}_3] \begin{bmatrix} -3 \\ -2 \\ 1 \end{bmatrix} = \boldsymbol{o}, \quad \text{すなわち} \quad -3\boldsymbol{a}_1 - 2\boldsymbol{a}_2 + \boldsymbol{a}_3 = \boldsymbol{o}$$

が成立することを表しているので，$\{\boldsymbol{a}_1, \boldsymbol{a}_2, \boldsymbol{a}_3\}$ は 1 次従属だとわかる． ■

注意 1． 本演習問題のポイントは，$\boldsymbol{a}_1, \boldsymbol{a}_2, \dots, \boldsymbol{a}_r \in \mathbb{R}^n$, $c_1, c_2, \cdots, c_r \in \mathbb{R}$ に対して

$$c_1\boldsymbol{a}_1 + c_2\boldsymbol{a}_2 + \cdots + c_r\boldsymbol{a}_r = [\boldsymbol{a}_1, \boldsymbol{a}_2, \dots, \boldsymbol{a}_r] \begin{bmatrix} c_1 \\ c_2 \\ \vdots \\ c_r \end{bmatrix}$$

というように，$\boldsymbol{a}_1, \boldsymbol{a}_2, \dots, \boldsymbol{a}_r$ の 1 次結合を行列の積で表すことである．このポイントと 1 次結合，1 次独立，1 次従属の定義をしっかり覚えておけば，様々な問題に有用である．例えば**問題 1** の一般化として，$\boldsymbol{a}_1, \boldsymbol{a}_2, \dots, \boldsymbol{a}_r, \boldsymbol{b} \in \mathbb{R}^n$ が与えられたときに，$\boldsymbol{b}$ が $\boldsymbol{a}_1, \boldsymbol{a}_2, \dots, \boldsymbol{a}_r$ の 1 次結合で表されるかどうかという問題については，1 次結合の定義より $\boldsymbol{b} = c_1\boldsymbol{a}_1 + c_2\boldsymbol{a}_2 + \cdots + c_r\boldsymbol{a}_r$ の形に表されるかどうかという問題であるが，それは

$$[\boldsymbol{a}_1, \boldsymbol{a}_2, \dots, \boldsymbol{a}_r] \begin{bmatrix} c_1 \\ c_2 \\ \vdots \\ c_r \end{bmatrix} = \boldsymbol{b}$$

をみたす $c_1, c_2, \dots, c_r$ はあるかどうかという連立 1 次方程式を解く問題となる．

$\{\boldsymbol{a}_1, \boldsymbol{a}_2, \dots, \boldsymbol{a}_r\}$ の 1 次独立性・従属性の判定についても，$c_1\boldsymbol{a}_1 + c_2\boldsymbol{a}_2 + \cdots + c_r\boldsymbol{a}_r = \boldsymbol{o}$ が成り立つのは $c_1 = c_2 = \cdots = c_r = 0$ のときに限るかそうでないかを調べることになるが，それは

$$[\boldsymbol{a}_1, \boldsymbol{a}_2, \dots, \boldsymbol{a}_r] \begin{bmatrix} c_1 \\ c_2 \\ \vdots \\ c_r \end{bmatrix} = \boldsymbol{o}$$

が成立するのは

$$\begin{bmatrix} c_1 \\ c_2 \\ \vdots \\ c_r \end{bmatrix} = \boldsymbol{o}$$

のときに限るかそうでないかという連立 1 次方程式の問題になる．

注意 2． 連立 1 次方程式 $A\boldsymbol{x} = \boldsymbol{b}$ が解をもつことの必要十分条件は，$\operatorname{rank}[A, \boldsymbol{b}] = \operatorname{rank} A$ が成り立つことであった．とくに定数項ベクトルが $\boldsymbol{o}$ の場合は容易に $\operatorname{rank}[A, \boldsymbol{o}] = \operatorname{rank} A$ であること

がわかるので，ただ 1 つの解をもつか，無数の解をもつかのどちらかである（解をもたないことはない．実際 $A\boldsymbol{x} = \boldsymbol{o}$ は自明な解 $\boldsymbol{x} = \boldsymbol{o}$ をもつ）．本演習問題のように $\{\boldsymbol{a}_1, \boldsymbol{a}_2, \ldots, \boldsymbol{a}_r\}$ が 1 次独立か 1 次従属かという問題は，連立 1 次方程式

$$[\boldsymbol{a}_1, \boldsymbol{a}_2, \ldots, \boldsymbol{a}_r]\begin{bmatrix} x_1 \\ x_2 \\ \vdots \\ x_r \end{bmatrix} = \boldsymbol{o}$$

がただ 1 つの解をもつか無数の解をもつかという問題に書き直せるが，前者の場合が 1 次独立であり，後者の場合が 1 次従属であることに対応する．