１次独立・１次従属　演習問題２　解答例

以下に現れるベクトルは，すべて $\mathbb{R}^n$ に属すものとする．$\{\boldsymbol{a}_1, \boldsymbol{a}_2, \cdots, \boldsymbol{a}_r\}$ が **1 次独立**であるとは

$$c_1\boldsymbol{a}_1 + c_2\boldsymbol{a}_2 + \cdots + c_r\boldsymbol{a}_r = \boldsymbol{o} \quad \Rightarrow \quad c_1 = c_2 = \cdots = c_r = 0$$

をみたすことであり，1 次独立ではないとき $\{\boldsymbol{a}_1, \boldsymbol{a}_2, \cdots, \boldsymbol{a}_r\}$ は **1 次従属**という．加法の交換法則より，$\sigma_1, \sigma_2, \cdots, \sigma_r$ を $1, 2, \cdots, r$ を並び替えた数列とすると

$$\{\boldsymbol{a}_1, \boldsymbol{a}_2, \cdots, \boldsymbol{a}_r\} \text{ が 1 次独立} \quad \Leftrightarrow \quad \{\boldsymbol{a}_{\sigma_1}, \boldsymbol{a}_{\sigma_2}, \cdots, \boldsymbol{a}_{\sigma_r}\} \text{ が 1 次独立}$$

が成り立つことにも注意せよ（1 次独立性は $\boldsymbol{a}_1, \boldsymbol{a}_2, \cdots, \boldsymbol{a}_r$ の順序によらず，組 $\{\boldsymbol{a}_1, \boldsymbol{a}_2, \cdots, \boldsymbol{a}_r\}$ によって決まるということである）．

問題 1. $\{\boldsymbol{a}_1, \boldsymbol{a}_2, \cdots, \boldsymbol{a}_r\}$ は 1 次独立とする．このとき，$\{\boldsymbol{a}_{i_1}, \boldsymbol{a}_{i_2}, \cdots, \boldsymbol{a}_{i_s}\}$ $(1 \leq i_1 < i_2 < \cdots < i_s \leq r,\ s < r)$ も 1 次独立であることを示せ（すなわち，1 次独立なベクトルの組からいくつか抜き出してできるベクトルの組もまた 1 次独立である）．

解答. $s = r - 1$ のときを示せば十分である ($s < r - 1$ のときは，以下で得られる $s = r - 1$ のときの結果を $r - s$ 回繰り返せばよい).

$$c_1\boldsymbol{a}_{i_1} + c_2\boldsymbol{a}_{i_2} + \cdots + c_{r-1}\boldsymbol{a}_{i_{r-1}} = \boldsymbol{o}$$

とする．このとき $c_1 = c_2 = \cdots = c_{r-1} = 0$ となることを示せばよい．$j \in \{1, 2, \cdots, r\} \cap \{i_1, i_2, \cdots, i_{r-1}\}^c$ とする（すなわち，$\{\boldsymbol{a}_1, \boldsymbol{a}_2, \cdots, \boldsymbol{a}_r\}$ から $\{\boldsymbol{a}_{i_1}, \boldsymbol{a}_{i_2}, \cdots, \boldsymbol{a}_{i_{r-1}}\}$ を抜き出すときに，唯一抜き出されなかったベクトルが $\boldsymbol{a}_j$ となる）．このとき

$$c_1\boldsymbol{a}_{i_1} + c_2\boldsymbol{a}_{i_2} + \cdots + c_{r-1}\boldsymbol{a}_{i_{r-1}} + 0\boldsymbol{a}_j = c_1\boldsymbol{a}_{i_1} + c_2\boldsymbol{a}_{i_2} + \cdots + c_{r-1}\boldsymbol{a}_{i_{r-1}} = \boldsymbol{o} \tag{2.1}$$

となる．仮定より $\{\boldsymbol{a}_{i_1}, \boldsymbol{a}_{i_2}, \cdots, \boldsymbol{a}_{i_{r-1}}, \boldsymbol{a}_j\}$ は 1 次独立であることと式 (2.1) より

$$c_1 = c_2 = \cdots = c_{r-1} = 0 = 0$$

を得る． ■

問題 2. $\{\boldsymbol{a}_1, \boldsymbol{a}_2, \cdots, \boldsymbol{a}_r\}$ は 1 次従属とする．このとき，$\{\boldsymbol{a}_1, \boldsymbol{a}_2, \cdots, \boldsymbol{a}_r, \boldsymbol{a}_{r+1}, \boldsymbol{a}_{r+2}, \cdots \boldsymbol{a}_{r+s}\}$ も 1 次従属であることを示せ（すなわち，1 次従属なベクトルの組にいくつかベクトルを付け加えてできるベクトルの組もまた 1 次従属である）．

解答. $\{\boldsymbol{a}_1, \boldsymbol{a}_2, \cdots, \boldsymbol{a}_r, \boldsymbol{a}_{r+1}, \boldsymbol{a}_{r+2}, \cdots \boldsymbol{a}_{r+s}\}$ が 1 次独立とすると，問題 1 の結果から $\{\boldsymbol{a}_1, \boldsymbol{a}_2, \cdots, \boldsymbol{a}_r\}$ が 1 次独立となり矛盾する．したがって $\{\boldsymbol{a}_1, \boldsymbol{a}_2, \cdots, \boldsymbol{a}_r, \boldsymbol{a}_{r+1}, \boldsymbol{a}_{r+2}, \cdots \boldsymbol{a}_{r+s}\}$ は 1 次従属である． ■

問題 3. $\{\boldsymbol{a}_1, \boldsymbol{a}_2, \cdots, \boldsymbol{a}_r\}$ は 1 次独立とし，$\boldsymbol{b}$ は $\boldsymbol{a}_1, \boldsymbol{a}_2, \cdots, \boldsymbol{a}_r$ の 1 次結合では表せないとする．このとき，$\{\boldsymbol{a}_1, \boldsymbol{a}_2, \cdots, \boldsymbol{a}_r, \boldsymbol{b}\}$ は 1 次独立であることを示せ．

解答.

$$c_1\boldsymbol{a}_1 + c_2\boldsymbol{a}_2 + \cdots + c_r\boldsymbol{a}_r + c_{r+1}\boldsymbol{b} = \boldsymbol{o} \tag{2.2}$$

とする．このとき $c_1 = c_2 = \cdots = c_r = c_{r+1} = 0$ となることを示せばよい．$c_{r+1} \neq 0$ とすると (2.2) より

$$\boldsymbol{b} = \left(\frac{-c_1}{c_{r+1}}\right)\boldsymbol{a}_1 + \left(\frac{-c_2}{c_{r+1}}\right)\boldsymbol{a}_2 + \cdots + \left(\frac{-c_r}{c_{r+1}}\right)\boldsymbol{a}_r$$

となり，これは $\boldsymbol{b}$ が $\boldsymbol{a}_1, \boldsymbol{a}_2, \cdots, \boldsymbol{a}_r$ の 1 次結合で表せないことと矛盾する．よって $c_{r+1} = 0$ となる．再び (2.2) より

$$c_1\boldsymbol{a}_1 + c_2\boldsymbol{a}_2 + \cdots + c_r\boldsymbol{a}_r = \boldsymbol{o}$$

となり．$\{\boldsymbol{a}_1, \boldsymbol{a}_2, \cdots, \boldsymbol{a}_r\}$ は 1 次独立であるから $c_1 = c_2 = \cdots = c_r = 0$ とわかる．以上より

$$c_1 = c_2 = \cdots = c_r = c_{r+1} = 0.$$

■