1次独立・1次従属　問題1　解答

$\boxed{1}$ (i)　$x_1\boldsymbol{a}_1 + x_2\boldsymbol{a}_2 + x_3\boldsymbol{a}_3 = \boldsymbol{o}$ とする．このとき

$$\begin{bmatrix}\boldsymbol{a}_1 & \boldsymbol{a}_2 & \boldsymbol{a}_3\end{bmatrix}\begin{bmatrix}x_1\\x_2\\x_3\end{bmatrix} = \boldsymbol{o}. \tag{0.1}$$

連立1次方程式 (0.1) を解くために係数行列 $[\boldsymbol{a}_1, \boldsymbol{a}_2, \boldsymbol{a}_3]$ を行基本変形すると

$$\begin{bmatrix}\boldsymbol{a}_1 & \boldsymbol{a}_2 & \boldsymbol{a}_3\end{bmatrix} = \begin{bmatrix}1 & -1 & 3\\2 & -1 & 5\\2 & 3 & 1\end{bmatrix} \to \begin{bmatrix}1 & -1 & 3\\0 & 1 & -1\\0 & 5 & -5\end{bmatrix} \to \begin{bmatrix}1 & 0 & 2\\0 & 1 & -1\\0 & 0 & 0\end{bmatrix}.$$

ここで1回目の基本変形では第1行の2倍を第2行，第3行からそれぞれ引き，2回目の基本変形では第2行，第2行の (-5) 倍を第1行，第3行にそれぞれ加えた．よって，方程式 (0.1) の解は

$$\begin{bmatrix}x_1\\x_2\\x_3\end{bmatrix} = c\begin{bmatrix}-2\\1\\1\end{bmatrix} \quad (c \text{ は任意定数})$$

となる．とくに $c = 1$ の場合を考えれば，ベクトルの組 $\{\boldsymbol{a}_1, \boldsymbol{a}_2, \boldsymbol{a}_3\}$ の間には非自明な1次関係式 $-2\boldsymbol{a}_1 + \boldsymbol{a}_2 + \boldsymbol{a}_3 = \boldsymbol{o}$ が成立することがわかるので，$\{\boldsymbol{a}_1, \boldsymbol{a}_2, \boldsymbol{a}_3\}$ は1次従属だとわかる．

(ii)　$x_1\boldsymbol{a}_1 + x_2\boldsymbol{a}_2 + x_3\boldsymbol{a}_3 = \boldsymbol{o}$ とする．このとき

$$\begin{bmatrix}\boldsymbol{a}_1 & \boldsymbol{a}_2 & \boldsymbol{a}_3\end{bmatrix}\begin{bmatrix}x_1\\x_2\\x_3\end{bmatrix} = \boldsymbol{o}. \tag{0.2}$$

連立1次方程式 (0.2) を解くために係数行列 $[\boldsymbol{a}_1, \boldsymbol{a}_2, \boldsymbol{a}_3]$ を行基本変形すると

$$\begin{bmatrix}\boldsymbol{a}_1 & \boldsymbol{a}_2 & \boldsymbol{a}_3\end{bmatrix} = \begin{bmatrix}1 & -1 & 2\\2 & -1 & 3\\2 & 3 & 1\end{bmatrix} \to \begin{bmatrix}1 & -1 & 2\\0 & 1 & -1\\0 & 5 & -3\end{bmatrix} \to \begin{bmatrix}1 & 0 & 1\\0 & 1 & -1\\0 & 0 & 2\end{bmatrix} \to \cdots$$
$$\cdots \to \begin{bmatrix}1 & 0 & 1\\0 & 1 & -1\\0 & 0 & 1\end{bmatrix} \to \begin{bmatrix}1 & 0 & 0\\0 & 1 & 0\\0 & 0 & 1\end{bmatrix}.$$

ここで1回目の基本変形では第1行の2倍を第2行，第3行からそれぞれ引き，2回目の基本変形では第2行，第2行の (-5) 倍を第1行，第3行にそれぞれ加えた．さらに3回目の基本変形では第3行を1/2倍し，最後の基本変形では第3行を第1行から引き，第2行に加えた．よって，方程式 (0.2) の解は

$$\begin{bmatrix}x_1\\x_2\\x_3\end{bmatrix} = \begin{bmatrix}0\\0\\0\end{bmatrix}$$

とわかるので，$\{\boldsymbol{a}_1, \boldsymbol{a}_2, \boldsymbol{a}_3\}$ は1次独立だとわかる．

別解

(i) $\boldsymbol{a}_i$ を第 i 列 $(i=1,2,3)$ に並べた行列を A とおく．A を行基本変形すると

$$A = \begin{bmatrix} \boldsymbol{a}_1 & \boldsymbol{a}_2 & \boldsymbol{a}_3 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 1 & -1 & 3 \\ 2 & -1 & 5 \\ 2 & 3 & 1 \end{bmatrix} \to \begin{bmatrix} 1 & -1 & 3 \\ 0 & 1 & -1 \\ 0 & 5 & -5 \end{bmatrix} \to \begin{bmatrix} 1 & 0 & 2 \\ 0 & 1 & -1 \\ 0 & 0 & 0 \end{bmatrix}.$$

したがって $\mathrm{rank}\, A = 2 \neq 3$ とわかるので $\{\boldsymbol{a}_1, \boldsymbol{a}_2, \boldsymbol{a}_3\}$ は 1 次従属だとわかる．

(ii) $\boldsymbol{a}_i$ を第 i 列 $(i=1,2,3)$ に並べた行列を A とおく．Sarrus の方法より

$$|A| = 1\cdot(-1)\cdot 1 + 2\cdot 3\cdot 2 + (-1)\cdot 3\cdot 2 - (-1)\cdot 2\cdot 1 - 1\cdot 3\cdot 3 - 2\cdot(-1)\cdot 2 = 2 \neq 0$$

を得る．したがって $\{\boldsymbol{a}_1, \boldsymbol{a}_2, \boldsymbol{a}_3\}$ は 1 次独立だとわかる．

注意．“1 次”結合，“1 次”独立，“1 次”従属は，本によってはそれぞれ “線形”結合，“線形”独立，“線形”従属と呼ばれることもある．

Point

$\boldsymbol{a}_1, \boldsymbol{a}_2, \ldots, \boldsymbol{a}_r \in \mathbb{R}^n$，$A = [\boldsymbol{a}_1, \boldsymbol{a}_2, \cdots, \boldsymbol{a}_r]$ とおく．$\{\boldsymbol{a}_1, \boldsymbol{a}_2, \ldots, \boldsymbol{a}_r\}$ が 1 次従属か 1 次独立か判定するためには，連立 1 次方程式 $A\boldsymbol{x} = \boldsymbol{o}$ が非自明な解（$\boldsymbol{x} = \boldsymbol{o}$ 以外の解）をもつか，自明な解（$\boldsymbol{x} = \boldsymbol{o}$）のみをもつか調べればよい．とくに $r = n$ の場合，以下の 4 つの条件が同値となることにも注意せよ．

(i) $\{\boldsymbol{a}_1, \boldsymbol{a}_2, \ldots, \boldsymbol{a}_n\}$ は，1 次独立である．
(ii) $\mathrm{rank}\, A = n$.
(iii) A は正則である．
(iv) $|A| \neq 0$.