2 次形式　演習問題 1

n 個の変数 $x_1, x_2, \cdots, x_n$ に関する係数が実数であるような 2 次の同次式，すなわち

$$f(x_1, x_2, \cdots, x_n) = \sum_{i=1}^{n}\sum_{j=1}^{n} a_{ij}x_ix_j, \quad (a_{ij} \in \mathbb{R}, i, j = 1, 2, \cdots, n)$$

を **2 次形式**という．

以下では

$$\boldsymbol{x} = \begin{bmatrix} x_1 \\ x_2 \\ \vdots \\ x_n \end{bmatrix}$$

と度々おくことにする．また，$A = [a_{ij}]$ とおくと

$$f(x_1, x_2, \cdots, x_n) = {}^t\boldsymbol{x}A\boldsymbol{x}$$

と表せることにも注意せよ．

問 1. (i) A, B は 2 次正方行列で，どんな $\boldsymbol{x} \in \mathbb{R}^2$ に対しても ${}^t\boldsymbol{x}A\boldsymbol{x} = {}^t\boldsymbol{x}B\boldsymbol{x}$ が成立するとき，$A = B$ が成り立つかどうか答えよ．

(ii) A, B は n 次実対称行列で，どんな $\boldsymbol{x} \in \mathbb{R}^n$ に対しても ${}^t\boldsymbol{x}A\boldsymbol{x} = {}^t\boldsymbol{x}B\boldsymbol{x}$ が成立するならば $A = B$ であることを示せ．

問 2. 2 次形式

$$f(x_1, x_2, \cdots, x_n) = \sum_{i=1}^{n}\sum_{j=1}^{n} b_{ij}x_ix_j, \quad (b_{ij} \in \mathbb{R}, i, j = 1, 2, \cdots, n)$$

が与えられたとする．このとき，ある実対称行列 $A = [a_{ij}]$ がただ 1 つ存在して，

$$f(x_1, x_2, \cdots, x_n) = {}^t\boldsymbol{x}A\boldsymbol{x}$$

と表せることを示せ．

(Hint: 各 i, j について $f(x_1, x_2, \cdots, x_n)$ の x_i^2 の係数は b_{ii}, x_ix_j の係数は $b_{ij} + b_{ji}$ である．一方，実対称行列 $A = [a_{ij}]$ を用いて $f(x_1, x_2, \cdots, x_n) = {}^t\boldsymbol{x}A\boldsymbol{x}$ と表せたとするとき

$$f(x_1, x_2, \cdots, x_n) = {}^t\boldsymbol{x}A\boldsymbol{x} = \sum_{i=1}^{n}\sum_{j=1}^{n} a_{ij}x_ix_j$$

である．このとき x_i^2 の係数は a_{ii}, x_ix_j の係数は $a_{ij} + a_{ji} = 2a_{ij}$ である．）

以下では，与えられた 2 次形式 $f(x_1, x_2, \cdots, x_n)$ に対して，問 2 によって定まる実対称行列 A（すなわち $f(x_1, x_2, \cdots, x_n) = {}^t\boldsymbol{x}A\boldsymbol{x}$ をみたす実対称行列 A）をその 2 次形式 $f(x_1, x_2, \cdots, x_n)$ の行列と呼ぶことにする．

問 3. 次の 2 次形式に対して，それぞれの行列を答えよ．

(i) $f(x_1, x_2) = 4x_1^2 - 6x_1x_2 - x_2x_1 + 3x_2^2$

(ii) $f(x_1, x_2) = x_1^2 - 2x_1x_2 + 3x_2^2$

(iii) $f(x_1, x_2, x_3) = 2x_1^2 - 3x_2^2 + 2x_1x_2 + 6x_2x_3 - 4x_1x_3$