2 次形式　演習問題１　解答

n 個の変数 $x_1, x_2, \cdots, x_n$ に関する係数が実数であるような 2 次の同次式，すなわち

$$f(x_1, x_2, \cdots, x_n) = \sum_{i=1}^{n}\sum_{j=1}^{n} a_{ij}x_ix_j, \quad (a_{ij} \in \mathbb{R}, i, j = 1, 2, \cdots, n)$$

を **2 次形式**という．

以下では

$$\boldsymbol{x} = \begin{bmatrix} x_1 \\ x_2 \\ \vdots \\ x_n \end{bmatrix}$$

と度々おくことにする．また，$A = [a_{ij}]$ とおくと

$$f(x_1, x_2, \cdots, x_n) = {}^t\boldsymbol{x}A\boldsymbol{x}$$

と表せることにも注意せよ．

問 1.　(i) A, B は 2 次正方行列で，どんな $\boldsymbol{x} \in \mathbb{R}^2$ に対しても ${}^t\boldsymbol{x}A\boldsymbol{x} = {}^t\boldsymbol{x}B\boldsymbol{x}$ が成立するとき，$A = B$ が成り立つかどうか答えよ．

(ii) A, B は n 次実対称行列で，どんな $\boldsymbol{x} \in \mathbb{R}^n$ に対しても ${}^t\boldsymbol{x}A\boldsymbol{x} = {}^t\boldsymbol{x}B\boldsymbol{x}$ が成立するならば $A = B$ であることを示せ．

解答.　(i) 例えば

$$A = \begin{bmatrix} 0 & 1 \\ 0 & 0 \end{bmatrix}, \quad B = \begin{bmatrix} 0 & 0 \\ 1 & 0 \end{bmatrix}$$

とすると，すべての $\boldsymbol{x} \in \mathbb{R}^2$ に対して

$${}^t\boldsymbol{x}A\boldsymbol{x} = [x_1, x_2]\begin{bmatrix} 0 & 1 \\ 0 & 0 \end{bmatrix}\begin{bmatrix} x_1 \\ x_2 \end{bmatrix} = x_1x_2 = x_2x_1 = [x_1, x_2]\begin{bmatrix} 0 & 0 \\ 1 & 0 \end{bmatrix}\begin{bmatrix} x_1 \\ x_2 \end{bmatrix} = {}^t\boldsymbol{x}B\boldsymbol{x}$$

であるが，$A \neq B$ である．したがって，すべて $\boldsymbol{x} \in \mathbb{R}^2$ について ${}^t\boldsymbol{x}A\boldsymbol{x} = {}^t\boldsymbol{x}B\boldsymbol{x}$ が成立しても，$A = B$ であるとは限らない．■

(ii) $A = [a_{ij}], B = [b_{ij}]$ は n 次実対称行列で，どんな $\boldsymbol{x} \in \mathbb{R}^n$ に対しても ${}^t\boldsymbol{x}A\boldsymbol{x} = {}^t\boldsymbol{x}B\boldsymbol{x}$ が成立しているとする．また，$\{\boldsymbol{e}_1, \boldsymbol{e}_2, \cdots, \boldsymbol{e}_n\}$ を $\mathbb{R}^n$ の標準基底，すなわち

$$\boldsymbol{e}_1 = \begin{bmatrix} 1 \\ 0 \\ 0 \\ \vdots \\ 0 \end{bmatrix}, \quad \boldsymbol{e}_2 = \begin{bmatrix} 0 \\ 1 \\ 0 \\ \vdots \\ 0 \end{bmatrix}, \quad \cdots, \quad \boldsymbol{e}_n = \begin{bmatrix} 0 \\ 0 \\ \vdots \\ 0 \\ 1 \end{bmatrix}$$

とする．一般に n 次正方行列 $C = [c_{ij}]$ と $\boldsymbol{x}, \boldsymbol{y} \in \mathbb{R}^n$ に対して

$${}^t\boldsymbol{x}C\boldsymbol{y} = [x_1, x_2, \cdots, x_n]\begin{bmatrix} c_{11} & c_{12} & \cdots & c_{1n} \\ c_{21} & c_{22} & \cdots & c_{2n} \\ \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ c_{n1} & c_{n2} & \cdots & c_{nn} \end{bmatrix}\begin{bmatrix} y_1 \\ y_2 \\ \vdots \\ y_n \end{bmatrix} = \sum_{i=1}^{n}\sum_{j=1}^{n} c_{ij}x_iy_j$$

であるから，とくに各 i, j に対して

$$ {}^t\boldsymbol{e}_i C \boldsymbol{e}_j = c_{ij} $$

が成り立つ．これを用いるとどんな i についても

$$ a_{ii} = {}^t\boldsymbol{e}_i A \boldsymbol{e}_i = {}^t\boldsymbol{e}_i B \boldsymbol{e}_i = b_{ii} $$

が成り立つとわかる．また，$i \neq j$ のとき

$$ \begin{aligned} {}^t(\boldsymbol{e}_i + \boldsymbol{e}_j) A (\boldsymbol{e}_i + \boldsymbol{e}_j) &= ({}^t\boldsymbol{e}_i + {}^t\boldsymbol{e}_j) A (\boldsymbol{e}_i + \boldsymbol{e}_j) \\ &= {}^t\boldsymbol{e}_i A \boldsymbol{e}_i + {}^t\boldsymbol{e}_i A \boldsymbol{e}_j + {}^t\boldsymbol{e}_j A \boldsymbol{e}_i + {}^t\boldsymbol{e}_j A \boldsymbol{e}_j \\ &= a_{ii} + a_{ij} + a_{ji} + a_{jj} \\ &= a_{ii} + 2a_{ij} + a_{jj}. \end{aligned} \tag{13.1} $$

ここで，4 つ目の等号は，A が実対称行列であるから $a_{ij} = a_{ji}$ が成り立つことを用いた．同様にして

$$ {}^t(\boldsymbol{e}_i + \boldsymbol{e}_j) B (\boldsymbol{e}_i + \boldsymbol{e}_j) = b_{ii} + 2b_{ij} + b_{jj} \tag{13.2} $$

だとわかる．いま，仮定より ${}^t(\boldsymbol{e}_i + \boldsymbol{e}_j) A (\boldsymbol{e}_i + \boldsymbol{e}_j) = {}^t(\boldsymbol{e}_i + \boldsymbol{e}_j) B (\boldsymbol{e}_i + \boldsymbol{e}_j)$ が成り立つから，(13.1), (13.2) より

$$ a_{ii} + 2a_{ij} + a_{jj} = b_{ii} + 2b_{ij} + b_{jj}. $$

$a_{ii} = b_{ii}$, $a_{jj} = a_{jj}$ であったから

$$ a_{ij} = b_{ij} $$

を得る．以上より，$A = B$ である． ■

問 2. 2 次形式

$$ f(x_1, x_2, \cdots, x_n) = \sum_{i=1}^{n} \sum_{j=1}^{n} b_{ij} x_i x_j, \quad (b_{ij} \in \mathbb{R}, i, j = 1, 2, \cdots, n) $$

が与えられたとする．このとき，ある実対称行列 $A = [a_{ij}]$ がただ 1 つ存在して，

$$ f(x_1, x_2, \cdots, x_n) = {}^t\boldsymbol{x} A \boldsymbol{x} $$

と表せることを示せ．

(Hint: 各 i, j について $f(x_1, x_2, \cdots, x_n)$ の x_i^2 の係数は b_{ii}, $x_i x_j$ の係数は $b_{ij} + b_{ji}$ である．一方，実対称行列 $A = [a_{ij}]$ を用いて $f(x_1, x_2, \cdots, x_n) = {}^t\boldsymbol{x} A \boldsymbol{x}$ と表せたとするとき

$$ f(x_1, x_2, \cdots, x_n) = {}^t\boldsymbol{x} A \boldsymbol{x} = \sum_{i=1}^{n} \sum_{j=1}^{n} a_{ij} x_i x_j $$

である．このとき x_i^2 の係数は a_{ii}, $x_i x_j$ の係数は $a_{ij} + a_{ji} = 2a_{ij}$ である．)

解答. 各 i, j に対し，

$$ a_{ij} = \frac{1}{2}(b_{ij} + b_{ji}) \quad (\text{とくに } a_{ii} = \frac{1}{2}(b_{ii} + b_{ii}) = b_{ii}) $$

とおけば，$a_{ij} = a_{ji}$ が成り立つので $A = [a_{ij}]$ は実対称行列であり，

$$
\begin{aligned}
{}^t\boldsymbol{x}A\boldsymbol{x} &= [x_1, x_2, \cdots, x_n] \begin{bmatrix} a_{11} & a_{12} & \cdots & a_{1n} \\ a_{21} & a_{22} & \cdots & a_{2n} \\ \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ a_{n1} & a_{n2} & \cdots & a_{nn} \end{bmatrix} \begin{bmatrix} x_1 \\ x_2 \\ \vdots \\ x_n \end{bmatrix} \\
&= \sum_{i=1}^{n} \sum_{j=1}^{n} a_{ij} x_i x_j \\
&= \sum_{i=1}^{n} \sum_{j=1}^{n} \left(\frac{b_{ij} + b_{ji}}{2} \right) x_i x_j \\
&= \frac{1}{2} \left(\sum_{i=1}^{n} \sum_{j=1}^{n} b_{ij} x_i x_j + \sum_{i=1}^{n} \sum_{j=1}^{n} b_{ji} x_i x_j \right) \\
&= \frac{1}{2} \left(\sum_{i=1}^{n} \sum_{j=1}^{n} b_{ij} x_i x_j + \sum_{j=1}^{n} \sum_{i=1}^{n} b_{ji} x_j x_i \right) \\
&= \frac{1}{2} \left(2 \sum_{i=1}^{n} \sum_{j=1}^{n} b_{ij} x_i x_j \right) = \sum_{i=1}^{n} \sum_{j=1}^{n} b_{ij} x_i x_j \\
&= f(x_1, x_2, \cdots, x_n)
\end{aligned}
$$

を得る．ここで，5 番目の等号は $x_i x_j = x_j x_i$ としたあと和の順序を交換し，6 番目の等号は最後の和の添字の i と j を入れ替えた．

次に一意性を示す，すなわち A_1, A_2 が実対称行列で $f(x_1, x_2, \cdots, x_n) = {}^t\boldsymbol{x}A_1\boldsymbol{x} = {}^t\boldsymbol{x}A_2\boldsymbol{x}$ とするとき，$A_1 = A_2$ が成り立つことを示せばよいが，これは問 1(ii) で示している． ■

(**実対称行列 A が存在することの別証明**) $B = [b_{ij}]$ とおくと

$$f(x_1, x_2, \cdots, x_n) = {}^t\boldsymbol{x}B\boldsymbol{x}$$

が成り立つ．ここで，どんな $x_1, x_2, \cdots, x_n \in \mathbb{R}$ に対しても $f(x_1, x_2, \cdots, x_n) \in \mathbb{R}$ であるから，とくに $f(x_1, x_2, \cdots, x_n) = {}^tf(x_1, x_2, \cdots, x_n)$ が成り立つ．よって

$$f(x_1, x_2, \cdots, x_n) = {}^tf(x_1, x_2, \cdots, x_n) = {}^t\left({}^t\boldsymbol{x}B\boldsymbol{x}\right) = {}^t\boldsymbol{x}\,{}^tB\boldsymbol{x}.$$

したがって

$$
\begin{aligned}
2f(x_1, x_2, \cdots, x_n) &= f(x_1, x_2, \cdots, x_n) + f(x_1, x_2, \cdots, x_n) = {}^t\boldsymbol{x}B\boldsymbol{x} + {}^t\boldsymbol{x}\,{}^tB\boldsymbol{x} \\
&= {}^t\boldsymbol{x}(B + {}^tB)\boldsymbol{x}
\end{aligned}
$$

を得る．$A = (B + {}^tB)/2$ とおけば $A = {}^tA$ とわかるから A は実対称行列で

$$f(x_1, x_2, \cdots, x_n) = {}^t\boldsymbol{x}A\boldsymbol{x}$$

をみたす． ■

注意． 問 1 と問 2 から次のことがわかる:

2 次形式 $f(x_1, x_2, \cdots, x_n)$ が与えられたとき，それは n 次正方行列 A を用いて $f(x_1, x_2, \cdots, x_n) = {}^t\boldsymbol{x}A\boldsymbol{x}$ と表される．このような行列を用いた表し方は複数あるが，A が実対称行列となるような表し方は 2 次形式に対してただ 1 通りに決まる．

以下では，与えられた 2 次形式 $f(x_1, x_2, \cdots, x_n)$ に対して，問 2 によって定まる実対称行列 A（すなわち $f(x_1, x_2, \cdots, x_n) = {}^t\boldsymbol{x}A\boldsymbol{x}$ をみたす実対称行列 A）をその 2 次形式 $f(x_1, x_2, \cdots, x_n)$ の行列と呼ぶことにする．

問 3. 次の 2 次形式に対して，それぞれの行列を答えよ．

(i) $f(x_1, x_2) = 4x_1^2 - 6x_1x_2 - x_2x_1 + 3x_2^2$

(ii) $f(x_1, x_2) = x_1^2 - 2x_1x_2 + 3x_2^2$

(iii) $f(x_1, x_2, x_3) = 2x_1^2 - 3x_2^2 + 2x_1x_2 + 6x_2x_3 - 4x_1x_3$

解答. (i)

$$A = \begin{bmatrix} 4 & -7/2 \\ -7/2 & 3 \end{bmatrix}$$

とすると A は実対称行列で確かに

$$\begin{aligned} {}^t\boldsymbol{x}A\boldsymbol{x} &= [x_1, x_2] \begin{bmatrix} 4 & -7/2 \\ -7/2 & 3 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} x_1 \\ x_2 \end{bmatrix} = 4x_1^2 - \frac{7}{2}x_1x_2 - \frac{7}{2}x_2x_1 + 3x_2^2 \\ &= 4x_1^2 - 6x_1x_2 - x_2x_1 + 3x_2^2 = f(x_1, x_2). \end{aligned}$$

■

(ii)

$$A = \begin{bmatrix} 1 & -1 \\ -1 & 3 \end{bmatrix}$$

とすると A は実対称行列で確かに

$$\begin{aligned} {}^t\boldsymbol{x}A\boldsymbol{x} &= [x_1, x_2] \begin{bmatrix} 1 & -1 \\ -1 & 3 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} x_1 \\ x_2 \end{bmatrix} = x_1^2 - x_1x_2 - x_2x_1 + 3x_2^2 \\ &= x_1^2 - 2x_1x_2 + 3x_2^2 = f(x_1, x_2). \end{aligned}$$

■

(iii)

$$A = \begin{bmatrix} 2 & 1 & -2 \\ 1 & -3 & 3 \\ -2 & 3 & 0 \end{bmatrix}$$

とすると A は実対称行列で確かに

$$\begin{aligned} {}^t\boldsymbol{x}A\boldsymbol{x} &= [x_1, x_2, x_3] \begin{bmatrix} 2 & 1 & -2 \\ 1 & -3 & 3 \\ -2 & 3 & 0 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} x_1 \\ x_2 \\ x_3 \end{bmatrix} \\ &= 2x_1^2 - 3x_2^2 + x_1x_2 + x_2x_1 + 3x_2x_3 + 3x_3x_2 - 2x_1x_3 - 2x_3x_1 \\ &= 2x_1^2 - 3x_2^2 + 2x_1x_2 + 6x_2x_3 - 4x_1x_3 = f(x_1, x_2, x_3). \end{aligned}$$

■

注意 . 2 次形式

$$f(x_1, x_2, \cdots, x_n) = \sum_{i=1}^{n} \sum_{j=1}^{n} b_{ij} x_i x_j$$

が与えられたとき，その行列 $A = [a_{ij}]$ は問 2 の証明中で示したように

$$a_{ij} = \frac{1}{2}(b_{ij} + b_{ji}) \quad （とくに\ a_{ii} = \frac{1}{2}(b_{ii} + b_{ii}) = b_{ii}）$$

（すなわち $a_{ij} = \{(x_i x_j\text{の係数}) + (x_j x_i\text{の係数})\}/2$）で求められる．