§11 行列の対角化と三角化　演習問題 3　解答

✏ 問題の難易度の目安【基礎】★☆☆　【標準】★★☆　【発展】★★★

1 (★★★)(trace に関する不等式)

N を $n \times n$ 対称行列で, K を $n \times n$ 正定値行列とする. $\lambda_{\mathtt{min}}$, $\lambda_{\mathtt{max}}$ をそれぞれ N の固有値の最小値, 最大値とするとき, 不等式

$$\lambda_{\mathtt{min}}\mathtt{trace}(K) \leqslant \mathtt{trace}\,(NK) = \mathtt{trace}\,(KN) \leqslant \lambda_{\mathtt{max}}\mathtt{trace}(K)$$

が成り立つことを示せ.

解 N を対角行列 $\mathtt{diag}$ およびユニタリ行列 Q を用いて, $N = Q\,\mathtt{diag}\,Q^\top$ と分解する. 両辺の trace をとり, trace の交換法則 $\mathtt{trace}(AB) = \mathtt{trace}(BA)$ を用いると

$$\mathtt{trace}(NK) = \mathtt{trace}\left(Q\,\mathtt{diag}\,Q^\top K\right) = \mathtt{trace}\left(\mathtt{diag}\,Q^\top KQ\right). \tag{0.1}$$

仮定より $Q^\top KQ$ は半正定値行列であるから, 対角成分に 0 以上の数が並び, したがって

$$\mathtt{trace}\left(\mathtt{diag}\,Q^\top KQ\right) = \sum_{i=1}^{n} \overbrace{\underbrace{\mathtt{diag}_{ii}}_{\geqslant \lambda_{\mathtt{min}}}}^{\leqslant \lambda_{\mathtt{max}}} \underbrace{\left(Q^\top KQ\right)_{ii}}_{\geqslant 0} \tag{0.2}$$

である. よって, $\mathtt{trace}(K) = \mathtt{trace}\left(Q^\top KQ\right) = \sum_{i=1}^{n}\left(Q^\top KQ\right)_{ii}$ に注意して, 上の等式 (0.1)–(0.2) から,

$$\lambda_{\mathtt{min}}\mathtt{trace}(K) \leqslant \mathtt{trace}\,(NK) = \mathtt{trace}\,(KN) \leqslant \lambda_{\mathtt{max}}\mathtt{trace}(K)$$

となり, 証明が完了した. ■

2 (★★★★)(Schur の不等式)

X を n 個の実数固有値 $\{\lambda_1, \ldots, \lambda_n\}$ を持つ n 次実正方行列とする. このとき, 不等式

$$\mathtt{trace}(X^2) = \sum_{i=1}^{n} \lambda_i^2 \leqslant \mathtt{trace}(XX^\top)$$

が成り立つことを示せ. ただし, $X^\top$ は行列 X の転置を表す.

解 以下, Id は n 次単位行列を表す. Schur 分解により, 上三角行列 U とユニタリ行列 Q を用いて, $X = QUQ^\top$ と表すことができる. これにより,

$$X^2 = QU\underbrace{Q^\top Q}_{\mathrm{Id}}UQ^\top = QU^2Q^\top,$$

および

$$XX^\top = QUQ^\top \left(QUQ^\top\right)^\top = QU\underbrace{Q^\top Q}_{\mathrm{Id}}U^\top Q^\top = QUU^\top Q^\top$$

と計算できる. したがって, 上二つの等式において trace を取り, trace の交換法則を用いれば

$$\begin{aligned} \texttt{trace}(X^2) &= \texttt{trace}\left(QU^2Q^\top\right) = \texttt{trace}(U^2), \\ \texttt{trace}(XX^\top) &= \texttt{trace}\left(QUU^\top Q^\top\right) = \texttt{trace}(UU^\top). \end{aligned} \tag{0.3}$$

次に, 対角行列 $\texttt{diag}$ と対角成分が 0 の上三角行列 U_+ を用いて, 上三角行列 U は $U = \texttt{diag} + U_+$ と一意に表すことができるので,

$$\begin{aligned} \texttt{trace}(U^2) &= \texttt{trace}\left((\texttt{diag}+U_+)^2\right) \\ &= \texttt{trace}\left(\texttt{diag}^2 + \texttt{diag}\,U_+ + U_+\texttt{diag} + U_+^2\right) \\ &= \texttt{trace}\left(\texttt{diag}^2\right) + \texttt{trace}\left(\texttt{diag}\,U_+\right) + \texttt{trace}\left(U_+\texttt{diag}\right) + \texttt{trace}\left(U_+^2\right) \\ &\overset{\substack{\texttt{diag}\,U_+,\,U_+\texttt{diag},\,U_+^2 \\ \text{の対角成分は } 0}}{=} \texttt{trace}\left(\texttt{diag}^2\right). \end{aligned} \tag{0.4}$$

U_+ が対角成分 0 の上三角行列ならば, その転置 $U_+^\top$ は対角成分 0 の下三角行列になることに注意して, 同様の議論を展開すると,

$$\begin{aligned} \texttt{trace}(UU^\top) &= \texttt{trace}\left((\texttt{diag}+U_+)(\texttt{diag}+U_+)^\top\right) \\ &= \texttt{trace}\left((\texttt{diag}+U_+)(\texttt{diag}+U_+^\top)\right) \\ &= \texttt{trace}\left(\texttt{diag}^2\right) + \underbrace{\texttt{trace}\left(\texttt{diag}\,U_+^\top\right)}_{=0} + \underbrace{\texttt{trace}\left(U_+\texttt{diag}\right)}_{=0} + \underbrace{\texttt{trace}\left(U_+U_+^\top\right)}_{\geqslant 0} \\ &\geqslant \texttt{trace}\left(\texttt{diag}^2\right), \end{aligned} \tag{0.5}$$

ただし, 最後の行で $U_+U_+^\top$ の対角成分には平方数が並ぶことを用いた. したがって, (0.4) を $(0.3)_1$ に代入後, $(0.3)_2$ を用いて

$$\texttt{trace}(X^2) \overset{(0.3)_1}{=} \texttt{trace}(U^2) \overset{(0.4)}{=} \texttt{trace}\left(\texttt{diag}^2\right) \overset{(0.5)}{\leqslant} \texttt{trace}(UU^\top) \overset{(0.3)_2}{=} \texttt{trace}(XX^\top)$$

が得られ, 最後に $\texttt{trace}(X^2) = \sum_{i=1}^n \lambda_i^2$ であることから, 所望の不等式に逢着する. ∎