行列の三角化・対角化　演習問題２

問題 1. 行列[*1]

$$A = \begin{bmatrix} 3 & 1 & 2 \\ 0 & 2 & 2 \\ 0 & 0 & -1 \end{bmatrix}$$

について，以下の問に答えよ．

(i) A の固有値をすべて求め，各固有空間の基底をそれぞれ 1 組求めよ．

(ii) A は対角化可能である．その理由を答えよ．

(iii) A を対角化する行列 P，すなわち $P^{-1}AP$ が対角行列となるような正則行列 P を求め，A を対角化せよ．

(iv) k を自然数とするとき，A^k を求めよ．

解答. (i) 固有多項式は

$$|A - \lambda I| = \begin{vmatrix} 3-\lambda & 1 & 2 \\ 0 & 2-\lambda & 2 \\ 0 & 0 & -1-\lambda \end{vmatrix} = -(\lambda-3)(\lambda-2)(\lambda+1)$$

となり，固有値は固有方程式 $|A - \lambda I| = 0$ の解であったから A の固有値は $\lambda = 3, 2, -1$（すべて重複度 1）．

固有値 λ に対する A の固有空間を W_λ とおく．W_λ は

$$W_\lambda = \{\boldsymbol{x} \in \mathbb{R}^3 \mid A\boldsymbol{x} = \lambda\boldsymbol{x}\} = \{\boldsymbol{x} \in \mathbb{R}^3 \mid (A - \lambda I)\boldsymbol{x} = \boldsymbol{o}\}$$

であるから，同次連立 1 次方程式 $(A - \lambda I)\boldsymbol{x} = \boldsymbol{o}$ の解空間と等しい．また，

$$A - 3\lambda = \begin{bmatrix} 0 & 1 & 2 \\ 0 & -1 & 2 \\ 0 & 0 & -4 \end{bmatrix} \to \cdots \to \begin{bmatrix} 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \\ 0 & 0 & 0 \end{bmatrix}$$

と変形されるから $(A - 3I)\boldsymbol{x} = \boldsymbol{o}$ の解は

$$\boldsymbol{x} = c\begin{bmatrix} 1 \\ 0 \\ 0 \end{bmatrix} \quad (c \text{ は任意定数})$$

とわかる．よって

$$W_3 = \left\{ c\begin{bmatrix} 1 \\ 0 \\ 0 \end{bmatrix} \,\middle|\, c \in \mathbb{R} \right\} = \left\langle \begin{bmatrix} 1 \\ 0 \\ 0 \end{bmatrix} \right\rangle.$$

さらに容易に $c\begin{bmatrix} 1 \\ 0 \\ 0 \end{bmatrix} = \boldsymbol{o} \Rightarrow c = 0$ とわかるので，$\left\{ \begin{bmatrix} 1 \\ 0 \\ 0 \end{bmatrix} \right\}$ は 1 次独立とわかる．以上より $\left\{ \begin{bmatrix} 1 \\ 0 \\ 0 \end{bmatrix} \right\}$ は W_3 の 1 組の基底である．

[*1] 行列の三角化・対角化 演習問題１ (1) の行列と同じである．

同様にして W_2, W_{-1} の 1 組の基底はそれぞれ

$$\left\{\begin{bmatrix}1\\-1\\0\end{bmatrix}\right\},\quad \left\{\begin{bmatrix}1\\2\\-3\end{bmatrix}\right\}$$

とわかる（詳細は W_3 の議論を参考に解いてみよ）. ■

(ii) A は 3 次正方行列で，3 つの相異なる固有値をもつので A は対角化可能である. ■

(iii) A の各固有空間の基底をなす固有ベクトルを列に並べてできる行列

$$P = \begin{bmatrix}1 & 1 & 1\\0 & -1 & 2\\0 & 0 & -3\end{bmatrix}$$

を考えると，これは正則行列となり

$$P^{-1}AP = \begin{bmatrix}3 & 0 & 0\\0 & 2 & 0\\0 & 0 & -1\end{bmatrix}.$$

(iv)

$$P^{-1}AP = \begin{bmatrix}3 & 0 & 0\\0 & 2 & 0\\0 & 0 & -1\end{bmatrix}$$

であって，

$$\begin{aligned}(P^{-1}AP)^k &= \underbrace{(P^{-1}AP)(P^{-1}AP)\cdots(P^{-1}AP)}_{k}\\ &= P^{-1}\underbrace{A(PP^{-1})A(PP^{-1})\cdots A(PP^{-1})}_{k-1}AP\\ &= P^{-1}A^kP.\end{aligned}$$

であり，

$$\begin{bmatrix}3 & 0 & 0\\0 & 2 & 0\\0 & 0 & -1\end{bmatrix}^k = \begin{bmatrix}3^k & 0 & 0\\0 & 2^k & 0\\0 & 0 & (-1)^k\end{bmatrix}$$

（$D = [d_{ij}], D' = [d'_{ij}]$ を n 次の対角行列とするとき，$i \neq j \Rightarrow d_{ij} = d'_{ij} = 0$ であるから

$$(DD' \text{の } (i,j) \text{ 成分}) = \sum_{\ell=1}^{n} d_{ik}d'_{kj} = \begin{cases} d_{ii}d'_{ii} & (i = j)\\ 0 & (i \neq j)\end{cases}$$

とわかる．すなわち DD' も対角行列で

$$DD' = \begin{bmatrix}d_{11}d'_{11} & 0 & \cdots & 0\\ 0 & d_{22}d'_{22} & \cdots & 0\\ \vdots & \vdots & \ddots & \vdots\\ 0 & 0 & \cdots & d_{nn}d'_{nn}\end{bmatrix}$$

となることからわかる）となるので

$$P^{-1}A^kP = \begin{bmatrix}3^k & 0 & 0\\0 & 2^k & 0\\0 & 0 & (-1)^k\end{bmatrix},\quad \text{すなわち}\quad A^k = P\begin{bmatrix}3^k & 0 & 0\\0 & 2^k & 0\\0 & 0 & (-1)^k\end{bmatrix}P^{-1}$$

を得る．

$$P^{-1} = \frac{1}{3}\begin{bmatrix} 3 & 3 & 3 \\ 0 & -3 & -2 \\ 0 & 0 & -1 \end{bmatrix}$$

とわかるから

$$\begin{aligned} A^k &= P\begin{bmatrix} 3^k & 0 & 0 \\ 0 & 2^k & 0 \\ 0 & 0 & (-1)^k \end{bmatrix} P^{-1} = \begin{bmatrix} 1 & 1 & 1 \\ 0 & -1 & 2 \\ 0 & 0 & -3 \end{bmatrix}\begin{bmatrix} 3^k & 0 & 0 \\ 0 & 2^k & 0 \\ 0 & 0 & (-1)^k \end{bmatrix}\left(\frac{1}{3}\begin{bmatrix} 3 & 3 & 3 \\ 0 & -3 & -2 \\ 0 & 0 & -1 \end{bmatrix}\right) \\ &= \frac{1}{3}\begin{bmatrix} 3^{k+1} & 3^{k+1} - 3\cdot 2^k & 3^{k+1} - 2^{k+1} + (-1)^{k+1} \\ 0 & 3\cdot 2^k & 2^{k+1} + 2(-1)^{k+1} \\ 0 & 0 & -3(-1)^{k+1} \end{bmatrix}. \end{aligned}$$

■

補足　A を n 次正方行列とし，$\lambda_1, \lambda_2, \cdots, \lambda_r$ を A の相異なる固有値でそれぞれ重複度が $n_1, n_2, \cdots, n_r$ とする（$r \leq n$, $n_1 + n_2 + \cdots + n_r = n$ であることに注意せよ）．このときすべての $1 \leq i \leq r$ について

$$1 \leq \dim W_{\lambda_i} \leq n_i$$

が成り立つ．A が対角化可能となることの必要十分条件はすべての $1 \leq i \leq r$ について

$$\dim W_{\lambda_i} = n_i$$

が成り立つことである．とくにもし A が相異なる n 個の固有値をもつならば，$r = n$, $n_1 = n_2 = \cdots = n_r = 1$ の場合であるから，各 $1 \leq i \leq n$ について

$$1 \leq \dim W_{\lambda_i} \leq n_i = 1, \quad \text{すなわち} \quad \dim W_{\lambda_i} = n_i = 1$$

が成り立つので，A は対角化可能である．