固有値　解答

$\boxed{\mathbf{1}}$ 行列 $A=\begin{pmatrix} a & b \\ c & d \end{pmatrix}$ の固有値は，固有方程式

$$|tI-A|=\begin{vmatrix} t-a & -b \\ -c & t-d \end{vmatrix}=(t-a)(t-d)-bc=0$$

の解 t である。

(1) $\begin{pmatrix} 3 & 19 \\ 0 & 5 \end{pmatrix}$

$$\begin{vmatrix} t-3 & -19 \\ 0 & t-5 \end{vmatrix}=(t-3)(t-5)=0$$

より $t=3,5$ を得る。よって固有値は $3,5$ である。

(2) $\begin{pmatrix} 4 & 0 \\ -6 & 2 \end{pmatrix}$

$$\begin{vmatrix} t-4 & 0 \\ 6 & t-2 \end{vmatrix}=(t-4)(t-2)=0$$

より $t=2,4$ を得る。よって固有値は $2,4$ である。

(3) $\begin{pmatrix} 1 & 2 \\ 3 & 4 \end{pmatrix}$

$$\begin{vmatrix} t-1 & -2 \\ -3 & t-4 \end{vmatrix}=(t-1)(t-4)-6=t^2-5t-2=0$$

より $t=\dfrac{5\pm\sqrt{33}}{2}$ を得る。よって固有値は $\dfrac{5\pm\sqrt{33}}{2}$ である。

(4) $\begin{pmatrix} 1 & 2 \\ 4 & 3 \end{pmatrix}$

$$\begin{vmatrix} t-1 & -2 \\ -4 & t-3 \end{vmatrix}=(t-1)(t-3)-8=t^2-4t-5=(t-5)(t+1)=0$$

より $t=-1,5$ を得る。よって固有値は $-1,5$ である。

(5) $\begin{pmatrix} 0 & 1 \\ 1 & 0 \end{pmatrix}$

$$\begin{vmatrix} t & -1 \\ -1 & t \end{vmatrix}=t^2-1=0$$

より $t=\pm1$ を得る。よって固有値は ±1 である。

(6) $\begin{pmatrix} 2 & 1 \\ -5 & 3 \end{pmatrix}$

$$\begin{vmatrix} t-2 & -1 \\ 5 & t-3 \end{vmatrix} = (t-2)(t-3)+5 = t^2-5t+11 = 0$$

より $t = \dfrac{5 \pm \sqrt{19}\,i}{2}$ を得る。よって固有値は $\dfrac{5 \pm \sqrt{19}\,i}{2}$ である。

(7) $\begin{pmatrix} 1 & 7 \\ 3 & 21 \end{pmatrix}$

$$\begin{vmatrix} t-1 & -7 \\ -3 & t-21 \end{vmatrix} = (t-1)(t-21)-21 = t^2-22t = t(t-22) = 0$$

より $0, 22$ を得る。よって固有値は $0, 22$ である。

(8) $\begin{pmatrix} 5 & 8 \\ 0 & 0 \end{pmatrix}$

$$\begin{vmatrix} t-5 & -8 \\ 0 & t \end{vmatrix} = (t-5)t = 0$$

より $t = 0, 5$ を得る。よって固有値は $0, 5$ である。

(9) $\begin{pmatrix} 1 & 1 \\ 2 & 1 \end{pmatrix}$

$$\begin{vmatrix} t-1 & -1 \\ -2 & t-1 \end{vmatrix} = (t-1)^2-2 = t^2-2t-1 = 0$$

より $t = 1 \pm \sqrt{2}$ を得る。よって固有値は $1 \pm \sqrt{2}$ である。

(10) $\begin{pmatrix} 0 & 1 \\ -1 & 0 \end{pmatrix}$

$$\begin{vmatrix} t & -1 \\ 1 & t \end{vmatrix} = t^2+1 = 0$$

より $t = \pm i$ を得る。よって固有値は $\pm i$ である。

$\boxed{\mathbf{2}}$ 3×3 行列の固有値も固有方程式

$$|tI - A| = 0$$

の解として求められる。3 次の行列式を計算する必要があり，3 次方程式を解かなければならないところが前問との違いである。

(1) $\begin{pmatrix} 5 & 9 & -2 \\ 0 & 3 & 1 \\ 0 & 0 & 2 \end{pmatrix}$

$$\begin{vmatrix} t-5 & -9 & 2 \\ 0 & t-3 & -1 \\ 0 & 0 & t-2 \end{vmatrix} = (t-5)(t-3)(t-2) = 0$$

より $t = 2, 3, 5$ を得る。よって固有値は $2, 3, 5$ である。

(2) $\begin{pmatrix} 4 & 2 & 0 \\ 0 & 6 & 0 \\ -2 & 1 & 2 \end{pmatrix}$

$$\begin{vmatrix} t-4 & -2 & 0 \\ 0 & t-6 & 0 \\ 2 & -1 & t-2 \end{vmatrix} = (t-4)(t-6)(t-2) = 0$$

より $t = 2, 4, 6$ を得る。よって固有値は $2, 4, 6$ である。

(3) $\begin{pmatrix} -2 & 0 & 4 \\ 0 & 7 & 0 \\ 1 & 0 & 6 \end{pmatrix}$

$$\begin{vmatrix} t+2 & 0 & -4 \\ 0 & t-7 & 0 \\ -1 & 0 & t-6 \end{vmatrix} = (t-7)\begin{vmatrix} t+2 & -4 \\ -1 & t-6 \end{vmatrix} = (t-7)(t^2-4t-16) = 0$$

より $t = 7, 2 \pm 2\sqrt{5}$ を得る。よって固有値は $7, 2 \pm 2\sqrt{5}$ である。

(4) $\begin{pmatrix} 8 & 0 & 0 \\ -3 & 2 & -2 \\ 4 & 2 & 1 \end{pmatrix}$

$$\begin{vmatrix} t-8 & 0 & 0 \\ 3 & t-2 & 2 \\ -4 & -2 & t-1 \end{vmatrix} = (t-8)\begin{vmatrix} t-2 & 2 \\ -2 & t-1 \end{vmatrix} = (t-8)(t^2-3t+6) = 0$$

より $t = 8, \dfrac{3 \pm \sqrt{15}\,i}{2}$ を得る。よって固有値は $8, \dfrac{3 \pm \sqrt{15}\,i}{2}$ である。

(5) $\begin{pmatrix} 7 & 0 & -20 \\ -2 & 4 & 8 \\ 1 & 0 & -2 \end{pmatrix}$

$$\begin{aligned} \begin{vmatrix} t-7 & 0 & 20 \\ 2 & t-4 & -8 \\ -1 & 0 & t+2 \end{vmatrix} &= (t-4)\begin{vmatrix} t-7 & 20 \\ -1 & t+2 \end{vmatrix} = (t-4)(t^2-5t+6) \\ &= (t-4)(t-2)(t-3) = 0 \end{aligned}$$

より $t = 2, 3, 4$ を得る。よって固有値は $2, 3, 4$ である。

(6) $\begin{pmatrix} 7 & 2 & -2 \\ 7 & 6 & -4 \\ 11 & 5 & -3 \end{pmatrix}$

$$\begin{aligned}
\begin{vmatrix} t-7 & -2 & 2 \\ -7 & t-6 & 4 \\ -11 & -5 & t+3 \end{vmatrix} &= \begin{vmatrix} t-7 & -2 & 0 \\ -7 & t-6 & t-2 \\ -11 & -5 & t-2 \end{vmatrix} = (t-2)\begin{vmatrix} t-7 & -2 & 0 \\ -7 & t-6 & 1 \\ -11 & -5 & 1 \end{vmatrix} \\
&= (t-2)\begin{vmatrix} t-7 & -2 & 0 \\ 4 & t-1 & 0 \\ -11 & -5 & 1 \end{vmatrix} = (t-2)\begin{vmatrix} t-7 & -2 \\ 4 & t-1 \end{vmatrix} \\
&= (t-2)(t^2-8t+15) = (t-2)(t-3)(t-5) = 0
\end{aligned}$$

より $t = 2, 3, 5$ を得る。よって固有値は $2, 3, 5$ である。

(7) $\begin{pmatrix} -4 & 9 & -9 \\ -5 & 11 & -8 \\ -3 & 7 & -4 \end{pmatrix}$

$$\begin{aligned}
\begin{vmatrix} t+4 & -9 & 9 \\ 5 & t-11 & 8 \\ 3 & -7 & t+4 \end{vmatrix} &= \begin{vmatrix} t+4 & -9 & 0 \\ 5 & t-11 & t-3 \\ 3 & -7 & t-3 \end{vmatrix} = (t-3)\begin{vmatrix} t+4 & -9 & 0 \\ 5 & t-11 & 1 \\ 3 & -7 & 1 \end{vmatrix} \\
&= (t-3)\begin{vmatrix} t+4 & -9 & 0 \\ 2 & t-4 & 0 \\ 3 & -7 & 1 \end{vmatrix} = (t-3)\begin{vmatrix} t+4 & -9 \\ 2 & t-4 \end{vmatrix} \\
&= (t-3)(t^2+2) = 0
\end{aligned}$$

より $t = 3, \pm\sqrt{2}\,i$ を得る。よって固有値は $3, \pm\sqrt{2}\,i$ である。

(8) $\begin{pmatrix} 17 & -16 & -17 \\ 7 & -8 & -7 \\ 4 & -2 & -4 \end{pmatrix}$

$$\begin{aligned}
\begin{vmatrix} t-17 & 16 & 17 \\ -7 & t+8 & 7 \\ -4 & 2 & t+4 \end{vmatrix} &= \begin{vmatrix} t-17 & 16 & t \\ -7 & t+8 & 0 \\ -4 & 2 & t \end{vmatrix} = t\begin{vmatrix} t-17 & 16 & 1 \\ -7 & t+8 & 0 \\ -4 & 2 & 1 \end{vmatrix} \\
&= t\begin{vmatrix} t-13 & 14 & 0 \\ -7 & t+8 & 0 \\ -4 & 2 & 1 \end{vmatrix} = t\begin{vmatrix} t-13 & 14 \\ -7 & t+8 \end{vmatrix} \\
&= (t-3)(t^2-5t-6) = t(t-6)(t+1) = 0
\end{aligned}$$

より $t = 0, 6, -1$ を得る。よって固有値は $0, 6, -1$ である。

(9) $\begin{pmatrix} -6 & 8 & -8 \\ -1 & 3 & -1 \\ 6 & -6 & 8 \end{pmatrix}$

$$\begin{vmatrix} t+6 & -8 & 8 \\ 1 & t-3 & 1 \\ -6 & 6 & t-8 \end{vmatrix} = \begin{vmatrix} t+6 & -8 & 0 \\ 1 & t-3 & t-2 \\ -6 & 6 & t-2 \end{vmatrix} = (t-2)\begin{vmatrix} t+6 & -8 & 0 \\ 1 & t-3 & 1 \\ -6 & 6 & 1 \end{vmatrix}$$
$$= (t-2)\begin{vmatrix} t+6 & -8 & 0 \\ 7 & t-9 & 0 \\ -6 & 6 & 1 \end{vmatrix} = (t-2)\begin{vmatrix} t+6 & -8 \\ 7 & t-9 \end{vmatrix}$$
$$= (t-2)(t^2-3t+2) = (t-2)(t-1)(t-2) = 0$$

より $t = 1, 2, 2$ を得る。よって固有値は $1, 2, 2$ である。

(10) $\begin{pmatrix} -11 & -2 & 28 \\ 10 & 1 & -19 \\ -5 & -1 & 13 \end{pmatrix}$

$$\begin{vmatrix} t+11 & 2 & -28 \\ -10 & t-1 & 19 \\ 5 & 1 & t-13 \end{vmatrix} = \begin{vmatrix} t+1 & 0 & -2t-2 \\ -10 & t-1 & 19 \\ 5 & 1 & t-13 \end{vmatrix} = (t+1)\begin{vmatrix} 1 & 0 & -2 \\ -10 & t-1 & 19 \\ 5 & 1 & t-13 \end{vmatrix}$$
$$= (t+1)\begin{vmatrix} 1 & 0 & 0 \\ -10 & t-1 & -1 \\ 5 & 1 & t-3 \end{vmatrix} = (t+1)\begin{vmatrix} t-1 & -1 \\ 1 & t-3 \end{vmatrix}$$
$$= (t+1)(t^2-4t+4) = (t+1)(t-2)^2 = 0$$

より $t = -1, 2, 2$ を得る。よって固有値は $-1, 2, 2$ である。

(11) $\begin{pmatrix} -21 & 60 & 90 \\ -4 & 13 & 15 \\ -4 & 10 & 18 \end{pmatrix}$

$$\begin{vmatrix} t+21 & -60 & -90 \\ 4 & t-13 & -15 \\ 4 & -10 & t-18 \end{vmatrix} = \begin{vmatrix} t+21 & -60 & -90 \\ 0 & t-3 & -t+3 \\ 4 & -10 & t-18 \end{vmatrix} = (t-3)\begin{vmatrix} t+21 & -60 & -90 \\ 0 & 1 & -1 \\ 4 & -10 & t-18 \end{vmatrix}$$
$$= (t-3)\begin{vmatrix} t+21 & -60 & -150 \\ 0 & 1 & 0 \\ 4 & -10 & t-28 \end{vmatrix} = (t-3)\begin{vmatrix} t+21 & -150 \\ 4 & t-28 \end{vmatrix}$$
$$= (t-3)(t^2-7t+12) = (t-3)(t-3)(t-4) = 0$$

より $t = 3, 3, 4$ を得る。よって固有値は $3, 3, 4$ である。

(12) $\begin{pmatrix} 22 & -9 & -51 \\ 13 & -4 & -33 \\ 7 & -3 & -16 \end{pmatrix}$

$$\begin{vmatrix} t-22 & 9 & 51 \\ -13 & t+4 & 33 \\ -7 & 3 & t+16 \end{vmatrix} = \begin{vmatrix} t-1 & 0 & -3t+3 \\ -13 & t+4 & 33 \\ -7 & 3 & t+16 \end{vmatrix} = (t-1)\begin{vmatrix} 1 & 0 & -3 \\ -13 & t+4 & 33 \\ -7 & 3 & t+16 \end{vmatrix}$$
$$= (t-1)\begin{vmatrix} 1 & 0 & 0 \\ -13 & t+4 & -6 \\ -7 & 3 & t-5 \end{vmatrix} = (t-1)\begin{vmatrix} t+4 & -6 \\ 3 & t-5 \end{vmatrix}$$
$$= (t-3)(t^2-t-2) = (t-1)(t-2)(t+1) = 0$$

より $t = \pm 1, 2$ を得る。よって固有値は $\pm 1, 2$ である。

(13) $\begin{pmatrix} -21 & 22 & -15 \\ 15 & -12 & 7 \\ 57 & -54 & 35 \end{pmatrix}$

$$\begin{vmatrix} t+21 & -22 & 15 \\ -15 & t+12 & -7 \\ -57 & 54 & t-35 \end{vmatrix} = \begin{vmatrix} t+21 & -7 & 15 \\ -15 & t+5 & -7 \\ -57 & t+19 & t-35 \end{vmatrix} = \begin{vmatrix} t+21 & -7 & 15 \\ -15 & t+5 & -7 \\ -42 & 14 & t-28 \end{vmatrix}$$
$$= \begin{vmatrix} t & -7 & 15 \\ 3t & t+5 & -7 \\ 0 & 14 & t-28 \end{vmatrix} = t\begin{vmatrix} 1 & -7 & 15 \\ 3 & t+5 & -7 \\ 0 & 14 & t-28 \end{vmatrix} = t\begin{vmatrix} 1 & -7 & 15 \\ 0 & t+26 & -52 \\ 0 & 14 & t-28 \end{vmatrix}$$
$$= t\begin{vmatrix} t+26 & -52 \\ 14 & t-28 \end{vmatrix} = t\begin{vmatrix} t+26 & 2t \\ 14 & t \end{vmatrix} = t^2\begin{vmatrix} t+26 & 2 \\ 14 & 1 \end{vmatrix}$$
$$= t^2(t-2)$$

より $t = 0, 0, 2$ を得る。よって固有値は $0, 0, 2$ である。

(14) $\begin{pmatrix} 4 & 16 & -22 \\ -24 & -30 & 60 \\ -13 & -13 & 29 \end{pmatrix}$

$$
\begin{aligned}
\begin{vmatrix} t-4 & -16 & 22 \\ 24 & t+30 & -60 \\ 13 & 13 & t-29 \end{vmatrix} &= \begin{vmatrix} t-4 & -16 & 6 \\ 24 & t+30 & t-30 \\ 13 & 13 & t-16 \end{vmatrix} = \begin{vmatrix} t-4 & -t-12 & 6 \\ 24 & t+6 & t-30 \\ 13 & 0 & t-16 \end{vmatrix} \\
&= \begin{vmatrix} t-4 & -t-12 & 6 \\ 11 & t+6 & -14 \\ 13 & 0 & t-16 \end{vmatrix} = \begin{vmatrix} t-4 & -t-12 & t+2 \\ 11 & t+6 & -3 \\ 13 & 0 & t-3 \end{vmatrix} \\
&= 13 \begin{vmatrix} -t-12 & t+2 \\ t+6 & -3 \end{vmatrix} + (t-3) \begin{vmatrix} t-4 & -t-12 \\ 11 & t+6 \end{vmatrix} \\
&= 13(-t^2-5t+24) + (t-3)(t^2+13t+108) \\
&= -13(t-3)(t+8) + (t-3)(t^2+13t+108) \\
&= (t-3)(-13(t+8)+t^2+13t+108) \\
&= (t-3)(t^2+4)
\end{aligned}
$$

より $t=3, \pm\sqrt{2}\,i$ を得る。よって固有値は $3, \pm\sqrt{2}\,i$ である。

(15) $\begin{pmatrix} 17 & -6 & 24 \\ -40 & 14 & -68 \\ -20 & 7 & -31 \end{pmatrix}$

$$
\begin{aligned}
\begin{vmatrix} t-17 & 6 & -24 \\ 40 & t-14 & 68 \\ 20 & -7 & t+31 \end{vmatrix} &= \begin{vmatrix} t-17 & 6 & -24 \\ 0 & t & -2t+6 \\ 20 & -7 & t+31 \end{vmatrix} = \begin{vmatrix} t+3 & -1 & t+7 \\ 0 & t & -2t+6 \\ 20 & -7 & t+31 \end{vmatrix} \\
&= \begin{vmatrix} t+3 & -1 & t+5 \\ 0 & t & 6 \\ 20 & -7 & t+17 \end{vmatrix} = \begin{vmatrix} t+3 & -1 & 2 \\ 0 & t & 6 \\ 20 & -7 & t-3 \end{vmatrix} \\
&= t \begin{vmatrix} t+3 & 2 \\ 20 & t-3 \end{vmatrix} - 6 \begin{vmatrix} t+3 & -1 \\ 20 & -7 \end{vmatrix} \\
&= t(t^2-9-40) - 6(-7t-21+20) \\
&= t^3-7t+6 \\
&= (t-1)(t-2)(t+3)
\end{aligned}
$$

より $t=1,2,-3$ を得る。よって固有値は $1,2,-3$ である。

(16) $\begin{pmatrix} 21 & -40 & -80 \\ 14 & -30 & -53 \\ -4 & 10 & 15 \end{pmatrix}$

$$\begin{vmatrix} t-21 & 40 & 80 \\ -14 & t+30 & 53 \\ 4 & -10 & t-15 \end{vmatrix} = \begin{vmatrix} t-21 & 40 & 80 \\ -2 & t & 3t+8 \\ 4 & -10 & t-15 \end{vmatrix} = \begin{vmatrix} t-21 & 40 & 0 \\ -2 & t & t+8 \\ 4 & -10 & t+5 \end{vmatrix}$$

$$\begin{aligned} &= (t-21)\begin{vmatrix} t & t+8 \\ -10 & t+5 \end{vmatrix} - 40\begin{vmatrix} -2 & t+8 \\ 4 & t+5 \end{vmatrix} \\ &= (t-21)(t^2+5t+10t+80) - 40(-2t-10-4t-32) \\ &= t^3-6t^2+5t = t(t-1)(t-5) = 0 \end{aligned}$$

より $t = 0, 1, 5$ を得る。よって固有値は $0, 1, 5$ である。

3 4×4 行列の場合も同様で，固有方程式は 4 次の行列式から得られる 4 次方程式になる。

(1) $\begin{pmatrix} 7 & 8 & -3 & 5 \\ 0 & 4 & 1 & 3 \\ 0 & 0 & 4 & 2 \\ 0 & 0 & 0 & -3 \end{pmatrix}$

$$\begin{vmatrix} t-7 & -8 & 3 & -5 \\ 0 & t-4 & -1 & -3 \\ 0 & 0 & t-4 & -2 \\ 0 & 0 & 0 & t+3 \end{vmatrix} = (t-7)(t-4)^2(t+3) = 0$$

より $t = -3, 4, 4, 7$ を得る。よって固有値は $-3, 4, 4, 7$ である。

(2) $\begin{pmatrix} 3 & 2 & 5 & 8 \\ 2 & 6 & 4 & 1 \\ 0 & 0 & 8 & 9 \\ 0 & 0 & 0 & 5 \end{pmatrix}$

$$\begin{vmatrix} t-3 & -2 & -5 & -8 \\ -2 & t-6 & -4 & -1 \\ 0 & 0 & t-8 & -9 \\ 0 & 0 & 0 & t-5 \end{vmatrix} = \begin{vmatrix} t-3 & -2 \\ -2 & t-6 \end{vmatrix}(t-8)(t-5)$$

$$= (t^2-9t+14)(t-8)(t-5) = (t-2)(t-7)(t-8)(t-5) = 0$$

より $t = 2, 5, 7, 8$ を得る。よって固有値は $2, 5, 7, 8$ である。

(3) $\begin{pmatrix} 4 & 2 & 0 & 0 \\ -1 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 2 & -1 \\ 0 & 0 & 3 & 4 \end{pmatrix}$

$$
\begin{vmatrix} t-4 & -2 & 0 & 0 \\ 1 & t-1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & t-2 & 1 \\ 0 & 0 & -3 & t-4 \end{vmatrix} = \begin{vmatrix} t-4 & -2 \\ 1 & t-1 \end{vmatrix}\begin{vmatrix} t-2 & 1 \\ -3 & t-4 \end{vmatrix}
$$

$$
= (t^2-5t+6)(t^2-6t+11) = (t-2)(t-3)(t^2-6t+11) = 0
$$

より $t = 2, 3, 3 \pm \sqrt{2}\,i$ を得る。よって固有値は $2, 3, 3 \pm \sqrt{2}\,i$ である。

(4) $\begin{pmatrix} 4 & 2 & 8 & -7 \\ -1 & 1 & 12 & 6 \\ 0 & 0 & 2 & -1 \\ 0 & 0 & 3 & 4 \end{pmatrix}$

$$
\begin{vmatrix} t-4 & -2 & -8 & 7 \\ 1 & t-1 & -12 & -6 \\ 0 & 0 & t-2 & 1 \\ 0 & 0 & -3 & t-4 \end{vmatrix} = \begin{vmatrix} t-4 & -2 \\ 1 & t-1 \end{vmatrix}\begin{vmatrix} t-2 & 1 \\ -3 & t-4 \end{vmatrix}
$$

となって前問と同じ固有方程式が得られるので，固有値は $2, 3, 3 \pm \sqrt{2}\,i$ である。

(5) $\begin{pmatrix} 5 & -1 & -1 & 2 \\ 0 & 3 & 2 & 3 \\ 4 & -2 & -1 & 7 \\ 0 & 0 & 0 & 6 \end{pmatrix}$

$$
\begin{vmatrix} t-5 & 1 & 1 & -2 \\ 0 & t-3 & -2 & -3 \\ -4 & 2 & t+1 & -7 \\ 0 & 0 & 0 & t-6 \end{vmatrix} = \begin{vmatrix} t-5 & 1 & 1 \\ 0 & t-3 & -2 \\ -4 & 2 & t+1 \end{vmatrix}(t-6)
$$

となるので，$t = 6$ は固有値である。右辺の 3 次の行列式を計算する。

$$
\begin{vmatrix} t-5 & 1 & 1 \\ 0 & t-3 & -2 \\ -4 & 2 & t+1 \end{vmatrix} = \begin{vmatrix} t-5 & 1 & 0 \\ 0 & t-3 & -t+1 \\ -4 & 2 & t-1 \end{vmatrix} = (t-1)\begin{vmatrix} t-5 & 1 & 0 \\ 0 & t-3 & -1 \\ -4 & 2 & 1 \end{vmatrix}
$$

$$
= (t-1)\begin{vmatrix} t-5 & 1 & 0 \\ -4 & t-1 & 0 \\ -4 & 2 & 1 \end{vmatrix} = (t-1)\begin{vmatrix} t-5 & 1 \\ -4 & t-1 \end{vmatrix}
$$

$$
= (t-1)(t^2-6t+9) = (t-1)(t-3)^2
$$

したがってこの 3 次の行列式より $t = 1, 3, 3$ を得る。よって固有値は $1, 3, 3, 6$ である。

(6) $\begin{pmatrix} 2 & -2 & 0 & 2 \\ -3 & 9 & -3 & -4 \\ 0 & -4 & 2 & 4 \\ -3 & 9 & -3 & -4 \end{pmatrix}$

$$\begin{vmatrix} t-2 & 2 & 0 & -2 \\ 3 & t-9 & 3 & 4 \\ 0 & 4 & t-2 & -4 \\ 3 & -9 & 3 & t+4 \end{vmatrix} = \begin{vmatrix} t-2 & 2 & -t+2 & 0 \\ 3 & t-9 & 0 & t-5 \\ 0 & 4 & t-2 & 0 \\ 3 & -9 & 0 & t-5 \end{vmatrix}$$

$$= (t-2)(t-5)\begin{vmatrix} t-2 & 2 & -1 & 0 \\ 3 & t-9 & 0 & 1 \\ 0 & 4 & 1 & 0 \\ 3 & -9 & 0 & 1 \end{vmatrix}$$

$$= (t-2)(t-5)\begin{vmatrix} t-2 & 2 & -1 & 0 \\ 0 & t-9 & 0 & 1 \\ 0 & 4 & 1 & 0 \\ 0 & -9 & 0 & 1 \end{vmatrix}$$

$$= (t-2)^2(t-5)\begin{vmatrix} t-9 & 0 & 1 \\ 4 & 1 & 0 \\ -9 & 0 & 1 \end{vmatrix} = (t-2)^2(t-5)\begin{vmatrix} t-9 & 1 \\ -9 & 1 \end{vmatrix}$$

$$= (t-2)^2(t-5)t = 0$$

より $t = 0, 2, 2, 5$ を得る。よって固有値は $0, 2, 2, 5$ である。

(7) $\begin{pmatrix} 13 & 8 & 3 & -14 \\ -8 & -3 & 0 & 8 \\ -12 & -6 & 2 & 12 \\ 4 & 4 & 3 & -5 \end{pmatrix}$

$$\begin{vmatrix} t-13 & -8 & -3 & 14 \\ 8 & t+3 & 0 & -8 \\ 12 & 6 & t-2 & -12 \\ -4 & -4 & -3 & t+5 \end{vmatrix} = \begin{vmatrix} t-9 & -4 & 0 & -t+9 \\ 8 & t+3 & 0 & -8 \\ 12 & 6 & t-2 & -12 \\ -4 & -4 & -3 & t+5 \end{vmatrix}$$

$$= \begin{vmatrix} t-9 & -4 & 0 & 0 \\ 8 & t+3 & 0 & 0 \\ 12 & 6 & t-2 & 0 \\ -4 & -4 & -3 & t+1 \end{vmatrix}$$

$$= (t+1)(t-2)\begin{vmatrix} t-9 & -4 \\ 8 & t+3 \end{vmatrix}$$

$$= (t+1)(t-2)(t^2-6t+5) = (t+1)(t-2)(t-1)(t-5) = 0$$

より $t = -1, 1, 2, 5$ を得る。よって固有値は $-1, 1, 2, 5$ である。

(8) $\begin{pmatrix} 5 & 2 & 1 & -3 \\ -4 & -13 & -7 & 21 \\ -4 & -8 & -3 & 12 \\ -4 & -14 & -7 & 22 \end{pmatrix}$

$$
\begin{vmatrix} t-5 & -2 & -1 & 3 \\ 4 & t+13 & 7 & -21 \\ 4 & 8 & t+3 & -12 \\ 4 & 14 & 7 & t-22 \end{vmatrix} = \begin{vmatrix} t-5 & -2 & -1 & 3 \\ 0 & t-1 & 0 & -t+1 \\ 4 & 8 & t+3 & -12 \\ 4 & 14 & 7 & t-22 \end{vmatrix}
$$

$$
= (t-1)\begin{vmatrix} t-5 & -2 & -1 & 3 \\ 0 & 1 & 0 & -1 \\ 4 & 8 & t+3 & -12 \\ 4 & 14 & 7 & t-22 \end{vmatrix}
$$

$$
= (t-1)\begin{vmatrix} t-5 & -2 & -1 & 1 \\ 0 & 1 & 0 & 0 \\ 4 & 8 & t+3 & -4 \\ 4 & 14 & 7 & t-8 \end{vmatrix}
$$

$$
= (t-1)\begin{vmatrix} t-5 & -1 & 1 \\ 4 & t+3 & -4 \\ 4 & 7 & t-8 \end{vmatrix}
$$

$$
= (t-1)\begin{vmatrix} t-5 & -1 & 0 \\ 4 & t+3 & t-1 \\ 4 & 7 & t-1 \end{vmatrix} = (t-1)^2\begin{vmatrix} t-5 & -1 & 0 \\ 4 & t+3 & 1 \\ 4 & 7 & 1 \end{vmatrix}
$$

$$
= (t-1)^2\begin{vmatrix} t-5 & -1 & 0 \\ 0 & t-4 & 0 \\ 4 & 7 & 1 \end{vmatrix} = (t-1)^2(t-5)(t-4) = 0
$$

より $t = 1, 1, 4, 5$ を得る。よって固有値は $1, 1, 4, 5$ である。

コメント ここに記載した解答は，固有値を固有方程式の解として求める演習として作ったものです。そのため愚直に計算するというやり方をしました。線形代数における他のいろいろな知識を使うと，もっと簡単に求められる場合もあります。たとえば $\boxed{\mathbf{1}}$ (1), (2), (8), $\boxed{\mathbf{2}}$ (1), $\boxed{\mathbf{3}}$ (1) はすべて三角行列で，固有値は対角成分を読むだけで得られます。$\boxed{\mathbf{2}}$ (2), (3), (4), (5), $\boxed{\mathbf{3}}$ (2), (3), (4), (5) は三角行列の拡張版（三角行列の変形やブロック三角行列）で，そのように見ると計算を大幅に削減できます。

重要な定理として，

$$
\text{対角成分の和} = \text{固有値の和}
$$

が一般に成り立つので，これを覚えておくと非常に役立ちます。（行列 A の対角成分の和のことを A のトレースと言い，$\operatorname{tr} A$ と書きます。）まず，求めた固有値が合っているかの検算に使えます。それからたとえば $\boxed{\mathbf{1}}$ (7) であれば，1 行目と 2 行目が 1 次従属なので 0 が 1 つの固有値であることが（計算せずに）わかります。残りの固有値は 1 つなので，$\operatorname{tr} A = 22$ が固有値となります。