ベクトル空間の定義　演習問題２　解答

V を集合とし．$\mathbb{K}$ は $\mathbb{R}$ あるいは $\mathbb{C}$ とする．V は

- どんな $\boldsymbol{x}, \boldsymbol{y} \in V$ に対しても，その和と呼ばれる V の元がただ 1 つ定まっている（これを $\boldsymbol{x}+\boldsymbol{y}$ と表す），
- どんな $\boldsymbol{x}$ と $a \in \mathbb{K}$ に対しても，$\boldsymbol{x}$ の a 倍と呼ばれる V の元がただ 1 つ定まっている（これを $a\boldsymbol{x}$ と表す）

をみたし，さらに以下の (V1) ∼ (V8) の条件をみたすとする．このとき V を $\mathbb{K}$ 上のベクトル空間，あるいは $\mathbb{K}$ 上の線形空間という．

(V1) どんな $\boldsymbol{x}, \boldsymbol{y}, \boldsymbol{z} \in V$ についても，$(\boldsymbol{x}+\boldsymbol{y})+\boldsymbol{z} = \boldsymbol{x}+(\boldsymbol{y}+\boldsymbol{z})$（結合法則），

(V2) $\boldsymbol{x}, \boldsymbol{y} \in V$ についても，$\boldsymbol{x}+\boldsymbol{y} = \boldsymbol{y}+\boldsymbol{x}$（交換法則），

(V3) ある特別な元 $\boldsymbol{o} \in V$ が存在して，どんな $\boldsymbol{x} \in V$ に対しても $\boldsymbol{o}+\boldsymbol{x} = \boldsymbol{x}$ が成り立つ（$\boldsymbol{o}$ を零ベクトルという），

(V4) 各 $\boldsymbol{x} \in V$ に対し，$\boldsymbol{x}+\boldsymbol{x}' = \boldsymbol{o}$ をみたすような $\boldsymbol{x}'$ が存在する（$\boldsymbol{x}'$ を $-\boldsymbol{x}$ と表し，$\boldsymbol{x}$ の逆ベクトルという），

(V5) どんな $a, b \in \mathbb{K}$, $\boldsymbol{x} \in V$ についても，$(a+b)\boldsymbol{x} = a\boldsymbol{x}+b\boldsymbol{x}$,

(V6) どんな $a \in \mathbb{K}$, $\boldsymbol{x}, \boldsymbol{y} \in V$ についても，$a(\boldsymbol{x}+\boldsymbol{y}) = a\boldsymbol{x}+a\boldsymbol{y}$,

(V7) どんな $a, b \in \mathbb{K}$, $\boldsymbol{x} \in V$ についても，$(ab)\boldsymbol{x} = a(b\boldsymbol{x})$,

(V8) どんな $\boldsymbol{x} \in V$ についても，$1\boldsymbol{x} = \boldsymbol{x}$.

問 1. V を $\mathbb{K}$ 上のベクトル空間とする．以下の問に答えよ．

(i) $\boldsymbol{o}' \in V$ は，どんな $\boldsymbol{x} \in V$ に対しても $\boldsymbol{o}'+\boldsymbol{x} = \boldsymbol{x}$ をみたすとする．このとき，$\boldsymbol{o}' = \boldsymbol{o}$ となることを示せ（すなわちベクトル空間 V に対して，零ベクトルはただ 1 つである）．

解答． $\boldsymbol{o}' \in V$ は，どんな $\boldsymbol{x} \in V$ に対しても $\boldsymbol{o}'+\boldsymbol{x} = \boldsymbol{x}$ をみたすことから，

$$\boldsymbol{o} = \boldsymbol{o}'+\boldsymbol{o}$$

が成り立つ．また，(V2) と (V3) より

$$\boldsymbol{o}'+\boldsymbol{o} = \boldsymbol{o}+\boldsymbol{o}' = \boldsymbol{o}'$$

が成り立つ．したがって，$\boldsymbol{o} = \boldsymbol{o}'$. ■

(ii) $\boldsymbol{x} \in V$ とする．また，$\boldsymbol{y} \in V$ は $\boldsymbol{x}+\boldsymbol{y} = \boldsymbol{o}$ をみたすとする．このとき，$\boldsymbol{y} = -\boldsymbol{x}$ となることを示せ（すなわち $\boldsymbol{x} \in V$ に対して，$\boldsymbol{x}$ の逆ベクトルはただ 1 つである）．

解答． (V3) より

$$\boldsymbol{y} = \boldsymbol{o}+\boldsymbol{y} = (\boldsymbol{x}+(-\boldsymbol{x}))+\boldsymbol{y}$$

が成り立つ．また，

$$(\boldsymbol{x}+(-\boldsymbol{x}))+\boldsymbol{y} = ((-\boldsymbol{x})+\boldsymbol{x})+\boldsymbol{y} = (-\boldsymbol{x})+(\boldsymbol{x}+\boldsymbol{y}) = (-\boldsymbol{x})+\boldsymbol{o} = \boldsymbol{o}+(-\boldsymbol{x}) = -\boldsymbol{x}$$

が成り立つ．ここで，1 番目と 4 番目の等号は (V2) を，2 番目の等号は (V1) を，3 番目の等号は $\boldsymbol{y}$ の性質を，5 番目の等号は (V3) を用いた．したがって，$\boldsymbol{y} = -\boldsymbol{x}$. ■

(iii) $\boldsymbol{x} \in V$ とする．このとき，$0\boldsymbol{x} = \boldsymbol{o}$ となることを示せ．

解答. $0 = 0 + 0$ であることと，(V5) を用いて

$$0\boldsymbol{x} = (0+0)\boldsymbol{x} = 0\boldsymbol{x} + 0\boldsymbol{x},$$

すなわち $0\boldsymbol{x} = 0\boldsymbol{x} + 0\boldsymbol{x}$ が成り立つことがわかる．ここで，(V4) より存在が保証される $-0\boldsymbol{x}$ を両辺に加えると

$$0\boldsymbol{x} + (-0\boldsymbol{x}) = (0\boldsymbol{x} + 0\boldsymbol{x}) + (-0\boldsymbol{x})$$

を得る．左辺は (V4) より

$$\mathbf{0}x + (-0\boldsymbol{x}) = \boldsymbol{o},$$

右辺は (V1) と (V4)，さらに (V2), (V3) を用いれば

$$(0\boldsymbol{x} + 0\boldsymbol{x}) + (-0\boldsymbol{x}) = 0\boldsymbol{x} + (0\boldsymbol{x} + (-0\boldsymbol{x})) = 0\boldsymbol{x} + \boldsymbol{o} = \boldsymbol{o} + 0\boldsymbol{x} = 0\boldsymbol{x}$$

とわかるから，結果として

$$\boldsymbol{o} = 0\boldsymbol{x}$$

を得る． ■

(iv) $\boldsymbol{x} \in V$ とする．このとき，$(-1)\boldsymbol{x} = -\boldsymbol{x}$ となることを示せ．

解答.

$$\boldsymbol{x} + (-1)\boldsymbol{x} = 1\boldsymbol{x} + (-1)\boldsymbol{x} = (1 + (-1))\boldsymbol{x} = 0\boldsymbol{x} = \boldsymbol{o}$$

が成り立つ．ここで 1 番目の等号は (V8), 2 番目の等号は (V5), 最後の等号は (iii) の結果を用いた．よって

$$\boldsymbol{x} + (-1)\boldsymbol{x} = \boldsymbol{o}$$

を得るが，これは (ii) の結果から

$$(-1)\boldsymbol{x} = -\boldsymbol{x}$$

を意味する． ■

注意． (V2)(V3) からどんな $\boldsymbol{x} \in V$ に対しても

$$\boldsymbol{x} + \boldsymbol{o} = \boldsymbol{x},$$

$$\boldsymbol{x}' + \boldsymbol{x} = \boldsymbol{o} \quad \Rightarrow \quad \boldsymbol{x}' = -\boldsymbol{x}$$

が成り立つことにも注意せよ．