§1 ベクトル空間の定義　演習問題 1　解答

問題の難易度の目安【基礎】★☆☆　【標準】★★☆　【発展】★★★

1 (★☆☆)(実数値関数のなす空間)

集合 X 上の実数値関数全体を $\mathcal{F} = \mathcal{F}(X;\mathbb{R})$ とする．$\mathcal{F}$ における加法とスカラー倍を次のように定義することができる：

$$(f+g)(x) = f(x) + g(x)$$
$$(\lambda f)(x) = \lambda f(x)$$

ここで，f および g は $\mathcal{F}$ の任意の元であり，x は X の任意の元，λ は任意の実数値である．このとき，ここで定めた加法・スカラー倍によって $\mathcal{F}$ は $\mathbb{R}$ 上のベクトル空間になることを示せ．

解 以下，$f, g, h \in \mathcal{F}$, $x \in X$, $\lambda, \mu \in \mathbb{R}$ とする．

① (交換法則):

$$(f+g)(x) = f(x) + g(x) = g(x) + f(x) = (g+f)(x).$$

ゆえ，$f+g = g+f$ が成り立つ．

② (結合法則):

$$\begin{aligned}((f+g)+h)(x) = (f+g)(x) + h(x) &= f(x) + g(x) + h(x) \\ &= f(x) + (g+h)(x) \\ &= (f+(g+h))(x)\end{aligned}$$

ゆえ，$(f+g)+h = f+(g+h)$ が成り立つ．

③ (零元の存在):

$$(f+0)(x) = f(x) + 0(x) = f(x)$$

ゆえ，$f+0 = f$ が成り立つ．

④ (逆元の存在): 任意の $f \in \mathcal{F}$ に対して $g(x) := -f(x)$ $(x \in X)$ ととると，

$$(f+g)(x) = f(x) + g(x) = f(x) - g(x) = 0$$

となり，g が f の逆元となる．

⑤ (分配法則 1):

$$\begin{aligned}(\lambda(f+g))(x) = \lambda(f+g)(x) = \lambda(f(x)+g(x)) &= \lambda f(x) + \lambda g(x) \\ &= (\lambda f)(x) + (\lambda g)(x) = (\lambda f + \lambda g)(x)\end{aligned}$$

すなわち，$\lambda(f+g) = \lambda f + \lambda g$ が成り立つ．

⑥ (分配法則 2):

$$\begin{aligned}((\lambda+\mu)f)(x) = (\lambda+\mu)f(x) &= \lambda f(x) + \mu f(x) \\ &= (\lambda f)(x) + (\mu f)(x) \\ &= (\lambda f + \mu f)(x)\end{aligned}$$

すなわち，$(\lambda+\mu)f = \lambda f + \mu f$ が成り立つ.

⑦ (スカラー倍に関する結合法則):

$$(\lambda(\mu f))(x) = \lambda(\mu f)(x) = \lambda\mu f(x) = ((\lambda\mu)f)(x)$$

すなわち，$\lambda(\mu f) = (\lambda\mu)f$ が成り立つ.

⑧ (スカラー倍に関する単位元の存在): 任意の $f \in \mathcal{F}$ および任意の $x \in X$ に対し

$$(1f)(x) = 1f(x) = f(x)$$

ゆえ，$1f = f$ である.

以上より，$\mathcal{F}$ は $\mathbb{R}$ 上のベクトル空間となる. ∎

2 (★☆☆)(等式の証明)

V を $\mathbb{R}$ 上のベクトル空間とし，$\boldsymbol{x}, \boldsymbol{y} \in V, \alpha, \beta \in \mathbb{R}$ とする. このとき等式

$$(\alpha+\beta)(\boldsymbol{x}+\boldsymbol{y}) + (\alpha-\beta)(\boldsymbol{x}-\boldsymbol{y}) = 2\alpha\boldsymbol{x} + 2\beta\boldsymbol{y}$$

が成り立つことを，ベクトル空間の公理を用いて示せ.

解 ベクトル空間の公理を用いて，

$$(\alpha+\beta)(\boldsymbol{x}+\boldsymbol{y}) = \alpha(\boldsymbol{x}+\boldsymbol{y}) + \beta(\boldsymbol{x}+\boldsymbol{y}) = \alpha\boldsymbol{x} + \alpha\boldsymbol{y} + \beta\boldsymbol{x} + \beta\boldsymbol{y} \quad \cdots ㋐.$$

$$\begin{aligned}(\alpha-\beta)(\boldsymbol{x}-\boldsymbol{y}) = \alpha(\boldsymbol{x}-\boldsymbol{y}) + (-\beta)(\boldsymbol{x}-\boldsymbol{y}) &= \alpha\boldsymbol{x} + \alpha(-\boldsymbol{y}) + (-\beta)\boldsymbol{x} + (-\beta)(-\boldsymbol{y}) \\ &= \alpha\boldsymbol{x} - \alpha\boldsymbol{y} - \beta\boldsymbol{x} + \beta\boldsymbol{y} \quad \cdots ㋑.\end{aligned}$$

㋐, ㋑の左辺，右辺共に V の元であり，V は加法について閉じているから，㋐, ㋑より

$$\begin{aligned}(V \ni)\ (\alpha+\beta)(\boldsymbol{x}+\boldsymbol{y}) + (\alpha-\beta)(\boldsymbol{x}-\boldsymbol{y}) &= \alpha\boldsymbol{x} + \alpha\boldsymbol{y} + \beta\boldsymbol{x} + \beta\boldsymbol{y} \\ &\quad + \alpha\boldsymbol{x} - \alpha\boldsymbol{y} - \beta\boldsymbol{x} + \beta\boldsymbol{y} \\ &= 2\alpha\boldsymbol{x} + (\alpha-\alpha)\boldsymbol{y} + (\beta-\beta)\boldsymbol{x} + 2\beta\boldsymbol{y} \quad (\because\ \text{結合法則}) \\ &= 2\alpha\boldsymbol{x} + \boldsymbol{0} + \boldsymbol{0} + 2\beta\boldsymbol{y} \\ &= 2\alpha\boldsymbol{x} + 2\beta\boldsymbol{y} \quad (\because\ 0\boldsymbol{x} = \boldsymbol{0},\ \boldsymbol{x} + \boldsymbol{0} = \boldsymbol{x})\end{aligned}$$

となり，所望の等式を得る. ∎