行列式の基本性質（乗法性）　解答

1 行列式の乗法性

$$|AB| = |A||B|$$

を用いると簡単に計算できる。

(1) $\left|\begin{pmatrix}1 & 7\\ 0 & 2\end{pmatrix}\begin{pmatrix}3 & 0\\ 8 & 1\end{pmatrix}\right| = \left|\begin{pmatrix}1 & 7\\ 0 & 2\end{pmatrix}\right|\left|\begin{pmatrix}3 & 0\\ 8 & 1\end{pmatrix}\right| = 2 \times 3 = 6$

(2) $\left|\begin{pmatrix}2 & 0 & 0\\ 5 & 4 & 0\\ 8 & 9 & 1\end{pmatrix}\begin{pmatrix}3 & 11 & 7\\ 0 & -1 & 4\\ 0 & 0 & -2\end{pmatrix}\right| = \left|\begin{pmatrix}2 & 0 & 0\\ 5 & 4 & 0\\ 8 & 9 & 1\end{pmatrix}\right|\left|\begin{pmatrix}3 & 11 & 7\\ 0 & -1 & 4\\ 0 & 0 & -2\end{pmatrix}\right| = 8 \times 6 = 48$

(3) $\left|\begin{pmatrix}0 & 5 & 0\\ 3 & 1 & 4\\ 1 & 7 & 0\end{pmatrix}\begin{pmatrix}2 & 6 & 3\\ 1 & 0 & 2\\ 5 & 0 & 0\end{pmatrix}\right| = \left|\begin{pmatrix}0 & 5 & 0\\ 3 & 1 & 4\\ 1 & 7 & 0\end{pmatrix}\right|\left|\begin{pmatrix}2 & 6 & 3\\ 1 & 0 & 2\\ 5 & 0 & 0\end{pmatrix}\right| = 20 \times 60 = 1200$

(4) $\left|\begin{pmatrix}3 & 7 & 2 & 4\\ 4 & 2 & 0 & 5\\ 0 & 2 & 0 & 1\\ 0 & 3 & 0 & 0\end{pmatrix}\begin{pmatrix}0 & 0 & 2 & 0\\ 3 & 0 & 0 & 0\\ 0 & 0 & 0 & 1\\ 0 & 2 & 0 & 0\end{pmatrix}\right| = \left|\begin{pmatrix}3 & 7 & 2 & 4\\ 4 & 2 & 0 & 5\\ 0 & 2 & 0 & 1\\ 0 & 3 & 0 & 0\end{pmatrix}\right|\left|\begin{pmatrix}0 & 0 & 2 & 0\\ 3 & 0 & 0 & 0\\ 0 & 0 & 0 & 1\\ 0 & 2 & 0 & 0\end{pmatrix}\right| = (-24) \times (-12) = 288$

(5) $\left|\begin{pmatrix}11 & 5 & 8 & -2\\ 7 & 9 & 3 & 1\\ -8 & 4 & 15 & 3\\ 10 & 6 & 4 & 2\end{pmatrix}\begin{pmatrix}2 & 8 & 4 & 6\\ 5 & 2 & 7 & 9\\ 1 & 4 & 2 & 3\\ 13 & 8 & 1 & 7\end{pmatrix}\right| = \left|\begin{pmatrix}11 & 5 & 8 & -2\\ 7 & 9 & 3 & 1\\ -8 & 4 & 15 & 3\\ 10 & 6 & 4 & 2\end{pmatrix}\right|\left|\begin{pmatrix}2 & 8 & 4 & 6\\ 5 & 2 & 7 & 9\\ 1 & 4 & 2 & 3\\ 13 & 8 & 1 & 7\end{pmatrix}\right|$

右側の行列は第 1 行が第 3 行の 2 倍になっているので，その行列式は 0 である。したがって求める行列式は 0

2

(1) 実数を成分とする $n \times n$ 行列 A について，ある自然数 m があって $A^m = O$ が成り立っているとする（O は $n \times n$ の零行列を表す）。このとき $|A| = 0$ を示せ。

[解] $|A^m| = |A|^m$ だから，$|A|^m = 0$ より $|A| = 0$ を得る。

(2) 整数を成分とする $n \times n$ 行列 A について，ある自然数 m があって $A^m = I_n$ が成り立っているとする（I_n は $n \times n$ の単位行列を表す）。このとき $|A|$ は 1 または -1 であることを示せ。

[解] 同様に $|A|^m = 1$ であり，整数を成分とする行列の行列式は整数になるので，$|A| = k$ とすると $k^m = 1$ となる整数 k は ± 1 に限る。