行列式の基本性質（多重線形性，交代性）　演習問題２　解答

問 1.　(i) 行列

$$A = \begin{bmatrix} 0 & 2 & 1 \\ 3 & 1 & 0 \\ 2 & -1 & 1 \end{bmatrix}$$

について，$2|A|$ と $|2A|$ を求めよ．

解答. サラスの方法を用いると

$$\begin{aligned} |A| &= 0 \cdot 1 \cdot 1 + 2 \cdot 0 \cdot 2 + 3 \cdot (-1) \cdot 1 \\ &\quad - 1 \cdot 1 \cdot 2 - 2 \cdot 3 \cdot 1 - 0 \cdot (-1) \cdot 0 \\ &= -11 \end{aligned}$$

とわかるので，$2|A| = 2 \cdot (-11) = -22$．一方，行列式の行に関する多重線形性を用いると

$$|2A| = \begin{vmatrix} 0 & 4 & 2 \\ 6 & 2 & 0 \\ 4 & -2 & 2 \end{vmatrix} = 2 \begin{vmatrix} 0 & 2 & 1 \\ 6 & 2 & 0 \\ 4 & -2 & 2 \end{vmatrix} = 2^2 \begin{vmatrix} 0 & 2 & 1 \\ 3 & 1 & 0 \\ 4 & -2 & 2 \end{vmatrix} = 2^3 \begin{vmatrix} 0 & 2 & 1 \\ 3 & 1 & 0 \\ 2 & -1 & 1 \end{vmatrix} = 8 \cdot (-11) = -88$$

とわかる．

(ii) B を n 次正方行列とし，$c \in \mathbb{R}$ とする．このとき $|cB|$ を $|B|, n, c$ を用いて表せ．

解答. B の (i,j) 成分を b_{ij} とおく．行列式の行に関する多重線形性を用いて，第 1 行から第 n 行まで順に c を前に出していくと

$$\begin{aligned} |cB| &= \begin{vmatrix} cb_{11} & cb_{12} & \cdots & cb_{1n} \\ cb_{21} & cb_{22} & \cdots & cb_{2n} \\ \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ cb_{n1} & cb_{n2} & \cdots & cb_{nn} \end{vmatrix} \\ &= c \begin{vmatrix} b_{11} & b_{12} & \cdots & b_{1n} \\ cb_{21} & cb_{22} & \cdots & cb_{2n} \\ \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ cb_{n1} & cb_{n2} & \cdots & cb_{nn} \end{vmatrix} = c^2 \begin{vmatrix} b_{11} & b_{12} & \cdots & b_{1n} \\ b_{21} & b_{22} & \cdots & b_{2n} \\ \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ cb_{n1} & cb_{n2} & \cdots & cb_{nn} \end{vmatrix} = \cdots \\ &\cdots = c^n \begin{vmatrix} b_{11} & b_{12} & \cdots & b_{1n} \\ b_{21} & b_{22} & \cdots & b_{2n} \\ \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ b_{n1} & b_{n2} & \cdots & b_{nn} \end{vmatrix} \\ &= \begin{vmatrix} cb_{11} & cb_{12} & \cdots & cb_{1n} \\ cb_{21} & cb_{22} & \cdots & cb_{2n} \\ \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ cb_{n1} & cb_{n2} & \cdots & cb_{nn} \end{vmatrix} \\ &= c^n |B|. \end{aligned}$$

よって $|cB| = c^n |B|$ とわかる．

注意 . 一般に $|cB| = c|B|$ は成立しないことに注意.

問 2. A を n 次の交代行列，すなわち ${}^tA = -A$ をみたす n 次正方行列とする．n が奇数ならば $|A| = 0$ となることを示せ．ただし，$|{}^tA| = |A|$ が成立することは認めてよい[*1]．

解答. A が交代行列であること，$|{}^tA| = |A|$ が成り立つこと，さらに前問の結果を用いると

$$|A| = |{}^tA| = |-A| = (-1)^n|A|$$

が成り立つ．したがって n が奇数であれば $|A| = -|A|$，すなわち $|A| = 0$ を得る． ■

[*1] 行列式と行基本変形の関係や，行列の積の行列式の性質を用いて示される．