# 行列式の基本性質（多重線形性，交代性）　解答

$\boxed{\mathbf{1}}$

(1)

$$\begin{vmatrix} 2 & 4 & 0 \\ 5 & -1 & 3 \\ 6 & 1 & 4 \end{vmatrix} = \begin{vmatrix} 2 & 2 & 0 \\ 5 & 2 & 3 \\ 6 & 2 & 4 \end{vmatrix} + \begin{vmatrix} 2 & x & 0 \\ 5 & y & 3 \\ 6 & z & 4 \end{vmatrix}$$

をみたす $x, y, z$ を求めよ。

[解] 右辺の 2 つの行列の第 1 列と第 3 列は左辺の行列の第 1 列，第 3 列とそれぞれ等しいので，第 2 列に関する線形性を使うと，

$$\begin{pmatrix} 2 \\ 2 \\ 2 \end{pmatrix} + \begin{pmatrix} x \\ y \\ z \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 4 \\ -1 \\ 1 \end{pmatrix}$$

となっていれば問題の等号が成り立つことがわかる。したがって

$$x = 2,\ y = -3,\ z = -1$$

と取ればよい。

（問題は $x, y, z$ についての 1 次方程式が 1 本あるだけだから，解 $x, y, z$ はこれだけでなく無数にある。）

(2)

$$\begin{vmatrix} 1 & 2 & 4 & 3 \\ 4 & 0 & 2 & 3 \\ 5 & 3 & 6 & 0 \\ 3 & 1 & 5 & 2 \end{vmatrix} = \begin{vmatrix} 1 & 2 & 3 & 3 \\ 4 & 0 & 2 & 3 \\ 5 & 3 & 3 & 0 \\ 3 & 1 & 2 & 2 \end{vmatrix} + \begin{vmatrix} 1 & 2 & x & 3 \\ 4 & 0 & y & 3 \\ 5 & 3 & z & 0 \\ 3 & 1 & w & 2 \end{vmatrix}$$

をみたす $x, y, z, w$ を求めよ。

[解] 右辺の 2 つの行列の第 1 列，第 2 列，第 4 列は左辺の行列の第 1 列，第 2 列，第 4 列とそれぞれ等しいので，第 3 列に関する線形性を使うと，

$$\begin{pmatrix} 3 \\ 2 \\ 3 \\ 2 \end{pmatrix} + \begin{pmatrix} x \\ y \\ z \\ w \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 4 \\ 2 \\ 6 \\ 5 \end{pmatrix}$$

となっていれば問題の等号が成り立つことがわかる。したがって

$$x = 1,\ y = 0,\ z = 3,\ w = 3$$

と取ればよい。

（問題は $x, y, z, w$ についての 1 次方程式が 1 本あるだけだから，解 $x, y, z, w$ はこれだけでなく無数にある。）

$\boxed{\mathbf{2}}$ $a_{ij}$ を与えられた数と考え，$a_{ij}$ を用いて解答せよ。

(1)

$$\begin{vmatrix} a_{11} & a_{12} & x \\ a_{21} & a_{22} & y \\ a_{31} & a_{32} & z \end{vmatrix} = 0$$

となるような $(x, y, z) \neq (0, 0, 0)$ を 2 組求めよ。

[解] 同じ 2 つの列を持つ行列の行列式は 0 になるので,

$$(x, y, z) = (a_{11}, a_{21}, a_{31}),\ (a_{12}, a_{22}, a_{32})$$

と取ればよい。

(2)

$$\begin{vmatrix} a_{11} & a_{12} & x \\ a_{21} & a_{22} & y \\ a_{31} & a_{32} & z \end{vmatrix} = 0$$

となるような $(x, y, z)$ をすべて求めよ。

[解] 前問の 2 組の解の 1 次結合

$$(x, y, z) = c_1(a_{11}, a_{21}, a_{31}) + c_2(a_{12}, a_{22}, a_{32})$$

が解となる。

(3)

$$\begin{vmatrix} a_{11} & a_{12} & a_{13} & x \\ a_{21} & a_{22} & a_{23} & y \\ a_{31} & a_{32} & a_{33} & z \\ a_{41} & a_{42} & a_{43} & w \end{vmatrix} = 0$$

となるような $(x, y, z, w) \neq (0, 0, 0, 0)$ を 3 組求めよ。

[解] 同じ 2 つの列を持つ行列の行列式は 0 になるので,

$$(x, y, z, w) = (a_{11}, a_{21}, a_{31}, a_{41}),\ (a_{12}, a_{22}, a_{32}, a_{42}),\ (a_{13}, a_{23}, a_{33}, a_{43})$$

と取ればよい。

(4)

$$\begin{vmatrix} a_{11} & a_{12} & a_{13} & x \\ a_{21} & a_{22} & a_{23} & y \\ a_{31} & a_{32} & a_{33} & z \\ a_{41} & a_{42} & a_{43} & w \end{vmatrix} = 0$$

となるような $(x, y, z, w)$ をすべて求めよ。

[解] 前問の 3 組の解の 1 次結合

$$(x, y, z, w) = c_1(a_{11}, a_{21}, a_{31}, a_{41}) + c_2(a_{12}, a_{22}, a_{32}, a_{42}) + c_3(a_{13}, a_{23}, a_{33}, a_{43})$$

が解となる。