行列式の定義　解答

$\boxed{\mathbf{1}}$　行列式の定義の仕方は何通りかあるが，ここでは $n \times n$ 行列 $A = (a_{ij})$ の行列式を

$$(\sharp) \qquad |A| = \sum_{\sigma \in S_n} \mathrm{sgn}(\sigma) a_{1\sigma(1)} a_{2\sigma(2)} \cdots a_{n\sigma(n)}$$

で定義する。

(1) S_n は n 次対称群を表している。S_n について説明せよ。

[解] n 次対称群 S_n は，n 個の文字の並び替え（置換）の全体のなす集合である。n 文字としては $\{1, 2, \ldots, n\}$ を採用する。$i_1, i_2, \ldots, i_n$ を $1, 2, \ldots, n$ をある順番に並べたものとして，1 を i_1 に，2 を i_2 に，…，n を i_n に並べる並び替え（置換）を

$$\begin{pmatrix} 1 & 2 & \cdots & n \\ i_1 & i_2 & \cdots & i_n \end{pmatrix}$$

という記号で表す。たとえば $\begin{pmatrix} 1 & 2 & \cdots & n \\ 1 & 2 & \cdots & n \end{pmatrix}$ は何も変化させない置換，$\begin{pmatrix} 1 & 2 & 3 & \cdots & n \\ 2 & 1 & 3 & \cdots & n \end{pmatrix}$ は 1 と 2 を入れ替える置換，$\begin{pmatrix} 1 & 2 & 3 & 4 & \cdots & n \\ 2 & 3 & 1 & 4 & \cdots & n \end{pmatrix}$ は 1 を 2 に，2 を 3 に，3 を 1 に移す置換を表す。置換 $\begin{pmatrix} 1 & 2 & \cdots & n \\ i_1 & i_2 & \cdots & i_n \end{pmatrix}$ を 1 つの文字で表すこともある。

$$\sigma = \begin{pmatrix} 1 & 2 & \cdots & n \\ i_1 & i_2 & \cdots & i_n \end{pmatrix}$$

と表したとき，

$$\sigma(1) = i_1,\ \sigma(2) = i_2,\ \ldots,\ \sigma(n) = i_n$$

という書き方もする。なお，置換の全体は合成に関して群をなすので，S_n に群という名前がついている。

(2) $\sigma \in S_n$ に対して $\mathrm{sgn}(\sigma)$ はその符号を表している。$\mathrm{sgn}(\sigma)$ について説明せよ。

[解] 任意の置換は，2 文字だけの入れ替え（それを互換という）を何回か繰り返すことで得られる。置換に対してその回数は一意的には決まらないが，その回数が偶数回か奇数回かは決まる。置換 σ に対してそれが互換を偶数回繰り返して得られるとき $\mathrm{sgn}(\sigma) = 1$，奇数回繰り返して得られるとき $\mathrm{sgn}(\sigma) = -1$ と定義する。sgn のことを符号という。（なお教科書によっては sgn のことを転倒数としているものもある。）

(3)

$$|A| = \sum_{\sigma \in S_n} \mathrm{sgn}(\sigma) a_{\sigma(1)1} a_{\sigma(2)2} \cdots a_{\sigma(n)n}$$

を示せ。

[解] $\{\sigma(1),\sigma(2),\ldots,\sigma(n)\}$ の中には 1 から n までが 1 度づつ現れている。したがって $a_{\sigma(1)1}a_{\sigma(2)2}\cdots a_{\sigma(n)n}$ の積の順番を変更すると，

$$a_{1\tau(1)}a_{2\tau(2)}\cdots a_{n\tau(n)}$$

と書くことができる。ここで $\tau(1)$ は $\sigma(i)=1$ となるような i，$\tau(2)$ は $\sigma(i)=2$ となるような i，一般に $\tau(k)$ は $\sigma(i)=k$ となるような i を表していることがわかるであろう。これを言い換えると，$\sigma(i)$ を τ で移すと i になる。つまり

$$\tau(\sigma(i))=i$$

がすべての $i=1,2,\ldots,n$ について成り立つ。これは τ が σ の，群 S_n における逆元 σ^{-1} であることを意味している。$\mathrm{sgn}(\sigma^{-1})=\mathrm{sgn}(\sigma)$ となることは sgn の定義から簡単にわかる。したがって $\mathrm{sgn}(\sigma)=\mathrm{sgn}(\tau)$ としてよいので，

$$\sum_{\sigma\in S_n}\mathrm{sgn}(\sigma)a_{\sigma(1)1}a_{\sigma(2)2}\cdots a_{\sigma(n)n}=\sum_{\tau\in S_n}\mathrm{sgn}(\tau)a_{1\tau(1)}a_{2\tau(2)}\cdots a_{n\tau(n)}=|A|$$

が得られる。

$\boxed{\mathbf{2}}$ 行列式の定義 (♯) を用いて次の行列の行列式を求めよ。

(1) $\begin{pmatrix} a & 0 & 0 \\ 0 & b & 0 \\ 0 & 0 & c \end{pmatrix}$

(♯) の右辺の各項は A の第 1 行目の成分を必ず 1 つ含む。今の場合第 1 行目で 0 以外の成分は第 1 成分の a しかないから，第 1 成分を採用した項（つまり a_{11} を含む項）以外はすべて 0 になる。同じ理由で第 2 行からは第 2 成分 b を採用した項以外は 0 になる。すると第 3 行目からは第 1，2 列以外の成分（つまり第 3 成分）しか選べないので，

$$\sigma=\begin{pmatrix} 1 & 2 & 3 \\ 1 & 2 & 3 \end{pmatrix}$$

の場合の項だけが行列式に寄与する。$\mathrm{sgn}(\sigma)=1$ だから $\begin{vmatrix} a & 0 & 0 \\ 0 & b & 0 \\ 0 & 0 & c \end{vmatrix}=abc$ となる。

(2) $\begin{pmatrix} 0 & 0 & a \\ b & 0 & 0 \\ 0 & c & 0 \end{pmatrix}$

前問と同様の考察から，

$$\sigma=\begin{pmatrix} 1 & 2 & 3 \\ 3 & 1 & 2 \end{pmatrix}$$

の項だけが行列式に寄与する。σ は 1 番目と 2 番目の入れ替えのあとに 1 番目と 3 番目を入れ替えたものであり，2 文字の入れ替えを 2 回繰り返すと得られるので $\mathrm{sgn}(\sigma) = 1$ である。したがって $\begin{vmatrix} 0 & 0 & a \\ b & 0 & 0 \\ 0 & c & 0 \end{vmatrix} = abc$ となる。

(3) $\begin{pmatrix} a & 0 & b \\ c & 0 & 0 \\ 0 & 0 & d \end{pmatrix}$

($\sharp$) の右辺のどの項も第 2 列の成分を含むが，この行列の第 2 列の成分はすべて 0 なので $\begin{vmatrix} a & 0 & b \\ c & 0 & 0 \\ 0 & 0 & d \end{vmatrix} = 0$ となる。

(4) $\begin{pmatrix} a & 0 & 0 \\ b & c & 0 \\ d & e & f \end{pmatrix}$

第 1 行から第 1 成分 a を選んだ項だけが残り，第 2 行からは第 1 成分は取れないので第 2 成分を選んだ項だけが残り，すると第 3 列からは第 3 成分が選ばれるので，(1) と同様に $\begin{vmatrix} a & 0 & 0 \\ b & c & 0 \\ d & e & f \end{vmatrix} = acf$ となる。

(5) $\begin{pmatrix} 0 & a & b \\ c & 0 & 0 \\ d & e & f \end{pmatrix}$

第 2 行からは c を選んだ項だけが残る。第 1 行から a を選んだ場合は第 3 行からは残りの第 3 成分 f を選ぶことになり，第 1 行から b を選んだ場合は第 3 行からは e を選ぶことになる。a, c, f を選んだときの置換は $\begin{pmatrix} 1 & 2 & 3 \\ 2 & 1 & 3 \end{pmatrix}$ で，これは 1 番目と 2 番目の入れ替え 1 回だからその符号は -1 であり，b, c, e を選んだときの置換は $\begin{pmatrix} 1 & 2 & 3 \\ 3 & 1 & 2 \end{pmatrix}$ で，(2) で見た通りその符号は 1 となる。したがって $\begin{vmatrix} 0 & a & b \\ c & 0 & 0 \\ d & e & f \end{vmatrix} = -acf + bce$ となる。

(6) $\begin{pmatrix} a & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & b \\ 0 & 0 & c & 0 \\ 0 & d & 0 & 0 \end{pmatrix}$

第 1 行から第 1 成分 a，第 2 行から第 4 成分 b，第 3 行から第 3 成分 c，第 4 行から第 2 成分 d を選んだ項だけが行列式に寄与する。この選び方は置換 $\begin{pmatrix} 1 & 2 & 3 & 4 \\ 1 & 4 & 3 & 2 \end{pmatrix}$ で，これは 2 番目と 4 番目を 1 回入れ替えれば得られるのでその符号は -1 となる。したがって $\begin{vmatrix} a & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & b \\ 0 & 0 & c & 0 \\ 0 & d & 0 & 0 \end{vmatrix} = -abcd$ となる。

(7) $\begin{pmatrix} a & b & c & 0 \\ d & 0 & 0 & e \\ 0 & f & 0 & 0 \\ 0 & 0 & g & 0 \end{pmatrix}$

第 4 行から第 3 成分 g，第 3 行から第 2 成分 f を選んだ項だけが行列式に寄与する。第 2 行からは第 1 成分 d と第 4 成分 e が選べるが，第 1 成分を選ぶと第 1 行からは残っている第 4 成分 0 を選ぶことになり，その項は 0 である。よって 0 にならないのは第 2 行から第 4 成分 e を，第 1 行から第 1 成分 a を選んだ場合のみで，これに対応する置換は $\begin{pmatrix} 1 & 2 & 3 & 4 \\ 1 & 4 & 2 & 3 \end{pmatrix}$ となる。この置換の符号は (2) の置換 $\begin{pmatrix} 1 & 2 & 3 \\ 3 & 1 & 2 \end{pmatrix}$ の符号と同じであり 1 となる。したがって $\begin{vmatrix} a & b & c & 0 \\ d & 0 & 0 & e \\ 0 & f & 0 & 0 \\ 0 & 0 & g & 0 \end{vmatrix} = aefg$ となる。

(8) $\begin{pmatrix} a & b & c & d \\ 0 & e & f & g \\ 0 & 0 & h & i \\ 0 & 0 & 0 & j \end{pmatrix}$

第 4 行から第 4 成分，第 3 行から第 3 成分，第 2 行から第 2 成分，第 1 行から第 1 成分を選んだ項だけが行列式に寄与する。この置換 $\begin{pmatrix} 1 & 2 & 3 & 4 \\ 1 & 2 & 3 & 4 \end{pmatrix}$ の符号は 1 なので $\begin{vmatrix} a & b & c & d \\ 0 & e & f & g \\ 0 & 0 & h & i \\ 0 & 0 & 0 & j \end{vmatrix} = aehj$ となる。

3 行列式の定義 (♯) を用いて以下の問に答えよ。

(1) $n \times n$ 行列 $A = (a_{ij})$ の成分 a_{ij} がすべて整数ならば，$|A|$ は整数になることを示せ。

[解] 行列式 (♯) は行列の成分の積の和なので，整数の積は整数，整数の和は整数ということから行列式は整数となる。

(2) $n \times n$ 行列 $A = (a_{ij})$ に対して，すべての成分を (-1) 倍して得られる行列 $(-a_{ij})$ を $-A$ で表す。$|-A|$ を $|A|$ を用いて表せ。

[解] 行列式 $(\sharp)$ は行列の成分の n 個の積の和である。各成分が (-1) 倍されると，それらの n 個の積は $(-1)^n$ 倍され，その和を取るので，

$$|-A| = (-1)^n |A|$$

が得られる。

(3) $n \times n$ 行列 A の各成分が x の 1 次式であるとき，$|A|$ は x の高々n 次式となることを示せ。

[解] 前問と同様に，行列式を与える和の各項は 1 次式の n 個の積だから，n 次式となる。したがって行列式は n 次式の和となって，高々n 次式となる。なお，各項の n 次の項の係数の和が 0 になる場合には，次数は n より下がる。