連立１次方程式の解の構造　演習問題１

問 1. 連立 1 次方程式

$$\begin{cases} \ \ x + 2y \ - \ z = 1 \\ 2x + 4y - 2z = 4 \end{cases} \tag{1}$$

$$\begin{cases} \ \ x + 2y + \ \ z - w = \ \ 0 \\ 2x + 4y + 3z - w = -1 \\ 3x + 6y + \ \ z - w = \ \ 2 \end{cases} \tag{2}$$

$$\begin{cases} 3x_1 \qquad\quad + x_3 + 4x_4 + 2x_5 = \ \ 3 \\ \qquad + x_2 + x_3 + 5x_4 + \ \ x_5 = \ \ 8 \\ 3x_1 - x_2 - x_3 + 2x_4 \qquad\quad = -5 \\ 3x_1 - x_2 - x_3 + 2x_4 - \ \ x_5 = -7 \\ 3x_1 \qquad\qquad\quad + 3x_4 + \ \ x_5 = -1 \\ \qquad\qquad + x_3 + \ \ x_4 + 2x_5 = \ \ 6 \end{cases} \tag{3}$$

それぞれに対して，

(i) 拡大係数行列に行基本変形を行い，最後の列以外の部分を階段行列へ，すなわち

$$\begin{bmatrix} 0 & \cdots & 0 & 1 & * & \cdots & * & 0 & * & \cdots & * & 0 & * & \cdots & * \\ 0 & \cdots & 0 & 0 & 0 & \cdots & 0 & 1 & * & \cdots & * & 0 & * & \cdots & * \\ \vdots & & \vdots & \vdots & \vdots & & \vdots & & & & & & \vdots & & \vdots \\ 0 & \cdots & 0 & 0 & 0 & \cdots & 0 & 0 & 0 & \cdots & 0 & 1 & * & \cdots & * \\ 0 & \cdots & 0 & 0 & 0 & \cdots & 0 & 0 & 0 & \cdots & 0 & 0 & 0 & \cdots & * \\ \vdots & & \vdots & \vdots & \vdots & & \vdots & \vdots & \vdots & & \vdots & \vdots & \vdots & & \vdots \\ 0 & \cdots & 0 & 0 & 0 & \cdots & 0 & 0 & 0 & \cdots & 0 & 0 & 0 & \cdots & * \end{bmatrix}$$

の形へ変形せよ．

(ii) 係数行列，拡大係数行列のそれぞれの階数を調べ，方程式が「ただ 1 つの解をもつ」，「無数の解をもつ」，「解をもたない」，のいずれか判定せよ． さらに方程式が解をもつ場合は，その解を答えよ．

問 2. 連立 1 次方程式

$$\begin{cases} \ \ x \qquad - \qquad\qquad z = \ \ 3 \\ 2x + \ \ y + \ \ (a-2)z = \ \ 7 \\ -x - ay - 3(a-1)z = -4 \end{cases}$$

が，「ただ 1 つの解をもつ」，「無数の解をもつ」，「解をもたない」，ような a の値をそれぞれ求めよ．

問 3. 3 個の未知数に関する 2 個の方程式からなる連立 1 次方程式であって，無数の解をもち，さらに解の自由度が 1 となるものを 1 つ求めよ．

問 4. x_0 は連立 1 次方程式 $A\boldsymbol{x} = \boldsymbol{b}$ の 1 つの解とする．以下の問に答えよ．

(i) 方程式 $A\boldsymbol{x} = \boldsymbol{o}$ の任意の解 $\boldsymbol{x}'$ に対して，$x_0 + \boldsymbol{x}'$ は方程式 $A\boldsymbol{x} = \boldsymbol{b}$ の解となることを示せ.

(ii) 方程式 $A\boldsymbol{x} = \boldsymbol{b}$ の任意の解 $\boldsymbol{x}$ に対して，方程式 $A\boldsymbol{x} = \boldsymbol{o}$ の解 $\boldsymbol{x}'$ が存在して，$\boldsymbol{x} = \boldsymbol{x}_0 + \boldsymbol{x}'$ と表されることを示せ.