連立１次方程式の解の構造　演習問題１　詳解

以下詳解において，階段行列とは

$$
\begin{bmatrix}
0 & \cdots & 0 & 1 & * & \cdots & * & 0 & * & \cdots & * & 0 & * & \cdots & * \\
0 & \cdots & 0 & 0 & 0 & \cdots & 0 & 1 & * & \cdots & * & 0 & * & \cdots & * \\
\vdots & & \vdots & \vdots & \vdots & & \vdots & & & & & & \vdots & & \vdots \\
0 & \cdots & 0 & 0 & 0 & \cdots & 0 & 0 & 0 & \cdots & 0 & 1 & * & \cdots & * \\
0 & \cdots & 0 & 0 & 0 & \cdots & 0 & 0 & 0 & \cdots & 0 & 0 & 0 & \cdots & 0 \\
\vdots & & \vdots & \vdots & \vdots & & \vdots & \vdots & \vdots & & \vdots & \vdots & \vdots & & \vdots \\
0 & \cdots & 0 & 0 & 0 & \cdots & 0 & 0 & 0 & \cdots & 0 & 0 & 0 & \cdots & 0
\end{bmatrix}
$$

の形の行列のことをいう[*1].

まず，連立 1 次方程式の係数行列および拡大係数行列について復習しておく．n 個の未知数 $x_1, x_2, \ldots, x_n$ に関する m 個の方程式からなる連立 1 次方程式

$$
\begin{cases}
a_{11}x + a_{12}x_2 + \cdots + a_{1n}x_n = b_1 \\
a_{21}x + a_{22}x_2 + \cdots + a_{2n}x_n = b_2 \\
\qquad\qquad \cdots \\
a_{m1}x + a_{m2}x_2 + \cdots + a_{mn}x_n = b_m
\end{cases}
\tag{1}
$$

は，行列

$$
A = \begin{bmatrix} a_{11} & a_{12} & \cdots & a_{1n} \\ a_{21} & a_{22} & \cdots & a_{2n} \\ \vdots & \vdots & & \vdots \\ a_{m1} & a_{m2} & \cdots & a_{mn} \end{bmatrix}, \quad \boldsymbol{x} = \begin{bmatrix} x_1 \\ x_2 \\ \vdots \\ x_n \end{bmatrix}, \quad \boldsymbol{b} = \begin{bmatrix} b_1 \\ b_2 \\ \vdots \\ b_m \end{bmatrix}
$$

を用いて $A\boldsymbol{x} = \boldsymbol{b}$ と表される．A，$\boldsymbol{x}$, $\boldsymbol{b}$ をそれぞれ連立 1 次方程式 (1) の係数行列，未知数ベクトル，定数項ベクトルという．このように連立 1 次方程式を行列を用いた列ベクトルに関する方程式と見なして，その解は $\boldsymbol{x} = \cdots$ とベクトルで述べることも多い．また，A に b を列として付け加えた $m \times (n+1)$ 行列

$$
[A, \boldsymbol{b}] = \begin{bmatrix} a_{11} & a_{12} & \cdots & a_{1n} & b_1 \\ a_{21} & a_{22} & \cdots & a_{2n} & b_2 \\ \vdots & \vdots & & \vdots & \vdots \\ a_{m1} & a_{m2} & \cdots & a_{mn} & b_m \end{bmatrix}
$$

を連立 1 次方程式 (1) の拡大係数行列という．いま，拡大係数行列 $[A, \boldsymbol{b}]$ に適当な行基本変形を行って

$$
[A, \boldsymbol{b}] \to \cdots \to [B, \boldsymbol{c}] =
\begin{bmatrix}
0 & \cdots & 0 & 1 & * & \cdots & * & 0 & * & \cdots & * & 0 & * & \cdots & \beta_1 \\
0 & \cdots & 0 & 0 & 0 & \cdots & 0 & 1 & * & \cdots & * & 0 & * & \cdots & \beta_2 \\
\vdots & & \vdots & \vdots & \vdots & & \vdots & & & & & & \vdots & & \vdots \\
0 & \cdots & 0 & 0 & 0 & \cdots & 0 & 0 & 0 & \cdots & 0 & 1 & * & \cdots & \beta_k \\
0 & \cdots & 0 & 0 & 0 & \cdots & 0 & 0 & 0 & \cdots & 0 & 0 & 0 & \cdots & \beta_{k+1} \\
\vdots & & \vdots & \vdots & \vdots & & \vdots & \vdots & \vdots & & \vdots & \vdots & \vdots & & \vdots \\
0 & \cdots & 0 & 0 & 0 & \cdots & 0 & 0 & 0 & \cdots & 0 & 0 & 0 & \cdots & \beta_m
\end{bmatrix}
$$

[*1] 本によっては，この形の行列を簡約（階段）行列と呼ぶ．また，1 の成分が 0 ではない実数，0 の成分が任意の実数になることまで許した行列を階段行列と呼んでいる本もある．

というように第 1 列から第 n 列までが階段行列となるように変形したとする．ここで，階段行列

$$B = \begin{bmatrix} 0 & \cdots & 0 & 1 & * & \cdots & * & 0 & * & \cdots & * & 0 & * & \cdots \\ 0 & \cdots & 0 & 0 & 0 & \cdots & 0 & 1 & * & \cdots & * & 0 & * & \cdots \\ \vdots & & \vdots & \vdots & \vdots & & \vdots & & & & & & \vdots & \\ 0 & \cdots & 0 & 0 & 0 & \cdots & 0 & 0 & 0 & \cdots & 0 & 1 & * & \cdots \\ 0 & \cdots & 0 & 0 & 0 & \cdots & 0 & 0 & 0 & \cdots & 0 & 0 & 0 & \cdots \\ \vdots & & \vdots & \vdots & \vdots & & \vdots & \vdots & \vdots & & \vdots & \vdots & \vdots & \\ 0 & \cdots & 0 & 0 & 0 & \cdots & 0 & 0 & 0 & \cdots & 0 & 0 & 0 & \cdots \end{bmatrix}$$

は，係数行列 A の階段行列と一致していることに注意せよ．このとき，2 つの連立 1 次方程式 $A\boldsymbol{x} = \boldsymbol{b}$ と $B\boldsymbol{x} = \boldsymbol{c}$ は同じ解をもつのであった．階段行列 B の段を成している列，すなわち

$$\begin{bmatrix} 1 \\ 0 \\ \vdots \\ 0 \\ 0 \\ \vdots \\ 0 \end{bmatrix}, \quad \begin{bmatrix} 0 \\ 1 \\ \\ 0 \\ 0 \\ \vdots \\ 0 \end{bmatrix}, \quad \cdots \quad, \begin{bmatrix} 0 \\ 0 \\ \\ 1 \\ 0 \\ \vdots \\ 0 \end{bmatrix}$$

が第 $p_1, p_2, \ldots, p_k$ 列（$1 \leq p_1 < p_2 < \cdots < p_k \leq n$, $k = \mathrm{rank}\, A$），その他の列が第 $q_1, q_2, \ldots, q_{n-k}$ 列（$1 \leq q_1 < q_2 < \cdots < q_{n-k} \leq n$）だったとすると，$B\boldsymbol{x} = \boldsymbol{c}$ が表す連立 1 次方程式は

$$\begin{cases} x_{p_1} + (x_{q_1}, x_{q_2}, \ldots, x_{q_{n-k}} \text{ に関する 1 次式 }) = & \beta_1 \\ x_{p_2} + (x_{q_1}, x_{q_2}, \ldots, x_{q_{n-k}} \text{ に関する 1 次式 }) = & \beta_2 \\ \cdots & \\ x_{p_k} + (x_{q_1}, x_{q_2}, \ldots, x_{q_{n-k}} \text{ に関する 1 次式 }) = & \beta_k \\ 0 = & \beta_{k+1} \\ \vdots & \\ 0 = & \beta_m \end{cases} \tag{2}$$

となる．よって連立 1 次方程式 $B\boldsymbol{x} = \boldsymbol{c}$ が解をもつ（結果として $A\boldsymbol{x} = \boldsymbol{b}$ が解をもつ）必要十分条件は，$\beta_{k+1} = \beta_{k+2} = \cdots = \beta_m = 0$ となること，すなわち

$$[A, \boldsymbol{b}] \to \cdots \to [B, \boldsymbol{c}] = \begin{bmatrix} 0 & \cdots & 0 & 1 & * & \cdots & * & 0 & * & \cdots & * & 0 & * & \cdots & \beta_1 \\ 0 & \cdots & 0 & 0 & 0 & \cdots & 0 & 1 & * & \cdots & * & 0 & * & \cdots & \beta_2 \\ \vdots & & \vdots & \vdots & \vdots & & \vdots & & & & & & \vdots & & \vdots \\ 0 & \cdots & 0 & 0 & 0 & \cdots & 0 & 0 & 0 & \cdots & 0 & 1 & * & \cdots & \beta_k \\ 0 & \cdots & 0 & 0 & 0 & \cdots & 0 & 0 & 0 & \cdots & 0 & 0 & 0 & \cdots & 0 \\ \vdots & & \vdots & \vdots & \vdots & & \vdots & \vdots & \vdots & & \vdots & \vdots & \vdots & & \vdots \\ 0 & \cdots & 0 & 0 & 0 & \cdots & 0 & 0 & 0 & \cdots & 0 & 0 & 0 & \cdots & 0 \end{bmatrix}$$

となることである．階数を用いて言えば，これは

$$\mathrm{rank}\, [A, \boldsymbol{b}] = \mathrm{rank}\, A$$

を意味する．このとき $A\boldsymbol{x}=\boldsymbol{b}$ の解は $x_{p_1},x_{p_2},\dots,x_{p_k}$ を除く未知数 $x_{q_1},x_{q_2},\dots,x_{q_{n-k}}$ を任意定数 $c_1,c_2,\dots,c_{n-k}$ とおいて (2) から

$$\left\{\begin{array}{rcl} x_{p_1} &=& \beta_1 + (c_1,c_2,\dots,c_{n-k} \text{ に関する 1 次式 }) \\ x_{p_2} &=& \beta_2 + (c_1,c_2,\dots,c_{n-k} \text{ に関する 1 次式 }) \\ & \cdots & \\ x_{p_k} &=& \beta_k + (c_1,c_2,\dots,c_{n-k} \text{ に関する 1 次式 }) \\ x_{q_1} &=& c_1 \\ x_{q_2} &=& c_2 \\ & \cdots & \\ x_{q_{n-k}} &=& c_{n-k} \end{array}\right. ,$$

あるいは成分間でこれらをみたすベクトルで表される．任意定数の個数

$$n-k = n - \operatorname{rank} A$$

は，連立 1 次方程式の $A\boldsymbol{x}=\boldsymbol{b}$ の解の自由度と呼ばれる．この自由度が 0，すなわち $\operatorname{rank} A = n$ のとき，連立 1 次方程式 $A\boldsymbol{x}=\boldsymbol{b}$ はただ 1 つの解をもつ．

上記連立 1 次方程式の解の導出について，少し具体的に説明する．例えば 3 個の未知数 x,y,z に関する 4 個の方程式からなる連立 1 次方程式 $A\boldsymbol{x}=\boldsymbol{b}$ が与えられたとき，その拡大係数行列 $[A,\boldsymbol{b}]$ を行基本変形して行列

$$[A,\boldsymbol{b}] \to \cdots \to \begin{bmatrix} 1 & 1 & 0 & 2 \\ 0 & 0 & 1 & -1 \\ 0 & 0 & 0 & 2 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \end{bmatrix} \tag{3}$$

が得られたとしよう．この結果から $\operatorname{rank}[A,\boldsymbol{b}] \neq \operatorname{rank} A$ とわかるので，与えられた連立 1 次方程式は解をもたないことがわかる．実際，(3) の最後の行列の第 3 行が表す式は $0=2$ であり，矛盾した等式である．

今度は $[A,\boldsymbol{b}]$ を行基本変形して

$$[A,\boldsymbol{b}] \to \cdots \to \begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 & 2 \\ 0 & 1 & 0 & -1 \\ 0 & 0 & 1 & 2 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \end{bmatrix} \tag{4}$$

となったとしよう．$\operatorname{rank}[A,\boldsymbol{b}] = \operatorname{rank} A = 3$ （未知数の個数）とわかるので，この場合 $A\boldsymbol{x}=\boldsymbol{b}$ はただ 1 つの解をもつ．実際 (4) の最後の行列が表す連立 1 次方程式（の解）は

$$\left\{\begin{array}{rcr} x &=& 2 \\ y &=& -1 \\ z &=& 2 \end{array}\right.$$

であり，ベクトルで表すと

$$\boldsymbol{x} = \begin{bmatrix} x \\ y \\ z \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 2 \\ -1 \\ 2 \end{bmatrix}$$

となる．

最後の例として，$[A, \boldsymbol{b}]$ に行基本変形を施した結果が

$$[A, \boldsymbol{b}] \to \cdots \to \begin{bmatrix} 0 & 1 & 2 & 2 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \end{bmatrix} \tag{5}$$

となったとしよう．$\mathrm{rank}\,[A, \boldsymbol{b}] = \mathrm{rank}\,A = 1 < 3$ (未知数の個数) であるから，連立 1 次方程式 $A\boldsymbol{x} = \boldsymbol{b}$ は無数の解をもつことがわかる．実際，(5) の最後の行列が表す連立 1 次方程式は

$$y + 2z = 2$$

であり，((5) の最後の行列において，段を成していない列は第 1, 3 列であるから，第 1, 3 変数の）x, z をそれぞれ c_1, c_2 とおくと，$A\boldsymbol{x} = \boldsymbol{b}$ の解は

$$\boldsymbol{x} = \begin{bmatrix} x \\ y \\ z \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} c_1 \\ 2 - 2c_2 \\ c_2 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 0 \\ 2 \\ 0 \end{bmatrix} + c_1 \begin{bmatrix} 1 \\ 0 \\ 0 \end{bmatrix} + c_2 \begin{bmatrix} 0 \\ -2 \\ 1 \end{bmatrix} \tag{6}$$

（c_1, c_2 は任意定数）と表される．確かに (未知数の数) $-\ \mathrm{rank}\,A = 3 - 1 = 2$ 個の任意定数を用いて，すべての解を表すことができた．なお，(6) の最右辺のように，連立 1 次方程式 $A\boldsymbol{x} = \boldsymbol{b}$ が無数の解をもつ場合，各任意定数 $c_1, c_2, \ldots, c_\ell$ $(\ell = n - \mathrm{rank}\,A)$ で括ってその解を $\boldsymbol{x} = \boldsymbol{x}_0 + c_1\boldsymbol{x}_1 + c_2\boldsymbol{x}_2 + \cdots + c_\ell\boldsymbol{x}_\ell$ $(c_1, c_2, \cdots c_\ell$ は任意定数) と表しておくと，さらに解の構造が見える．実際このときベクトル $\boldsymbol{x}_0, \boldsymbol{x}_1, \boldsymbol{x}_2, \ldots, \boldsymbol{x}_\ell$ には特別な意味があり，x_0 は $A\boldsymbol{x} = \boldsymbol{b}$ の 1 つの解，各 $\boldsymbol{x}_i$ $(1 \leq i \leq \ell)$ は $A\boldsymbol{x} = \boldsymbol{o}$ の解となっている（**問** 4 を見よ）．

以上の議論の結果を定理としてまとめておく．

定理． 未知数 n の連立 1 次方程式 $A\boldsymbol{x} = \boldsymbol{b}$ に対して

$\mathrm{rank}\,[A, \boldsymbol{b}] = \mathrm{rank}\,A$	$\Leftrightarrow$	$A\boldsymbol{x} = \boldsymbol{b}$ は解をもつ．
$\mathrm{rank}\,[A, \boldsymbol{b}] = \mathrm{rank}\,A = n$	$\Leftrightarrow$	$A\boldsymbol{x} = \boldsymbol{b}$ はただ 1 つの解をもつ．
$\mathrm{rank}\,[A, \boldsymbol{b}] = \mathrm{rank}\,A < n$	$\Leftrightarrow$	$A\boldsymbol{x} = \boldsymbol{b}$ は無数の解をもつ．解全体は, $n - \mathrm{rank}\,A$ 個の任意定数を用いて表される．