連立１次方程式の解の構造　演習問題１　解答

問 1. 連立 1 次方程式

$$\begin{cases} x + 2y - z = 1 \\ 2x + 4y - 2z = 4 \end{cases} \tag{1}$$

$$\begin{cases} x + 2y + z - w = 0 \\ 2x + 4y + 3z - w = -1 \\ 3x + 6y + z - w = 2 \end{cases} \tag{2}$$

$$\begin{cases} 3x_1 + x_3 + 4x_4 + 2x_5 = 3 \\ + x_2 + x_3 + 5x_4 + x_5 = 8 \\ 3x_1 - x_2 - x_3 + 2x_4 = -5 \\ 3x_1 - x_2 - x_3 + 2x_4 - x_5 = -7 \\ 3x_1 + 3x_4 + x_5 = -1 \\ + x_3 + x_4 + 2x_5 = 6 \end{cases} \tag{3}$$

それぞれに対して，

(i) 拡大係数行列に行基本変形を行い，最後の列以外の部分を階段行列へ，すなわち

$$\begin{bmatrix} 0 & \cdots & 0 & 1 & * & \cdots & * & 0 & * & \cdots & * & 0 & * & \cdots & * \\ 0 & \cdots & 0 & 0 & 0 & \cdots & 0 & 1 & * & \cdots & * & 0 & * & \cdots & * \\ \vdots & & \vdots & \vdots & \vdots & & \vdots & & & & & & \vdots & & \vdots \\ 0 & \cdots & 0 & 0 & 0 & \cdots & 0 & 0 & 0 & \cdots & 0 & 1 & * & \cdots & * \\ 0 & \cdots & 0 & 0 & 0 & \cdots & 0 & 0 & 0 & \cdots & 0 & 0 & 0 & \cdots & * \\ \vdots & & \vdots & \vdots & \vdots & & \vdots & \vdots & \vdots & & \vdots & \vdots & \vdots & & \vdots \\ 0 & \cdots & 0 & 0 & 0 & \cdots & 0 & 0 & 0 & \cdots & 0 & 0 & 0 & \cdots & * \end{bmatrix}$$

の形へ変形せよ．

解答．（(1) について）第 1 行の 2 倍を第 2 行から引く基本変形で

$$\begin{bmatrix} 1 & 2 & -1 & 1 \\ 2 & 4 & -2 & 4 \end{bmatrix} \to \begin{bmatrix} 1 & 2 & -1 & 1 \\ 0 & 0 & 0 & 2 \end{bmatrix}$$

が得られる． ■

（(2) について）行基本変形によって

$$\begin{bmatrix} 1 & 2 & 1 & -1 & 0 \\ 2 & 4 & 3 & -1 & -1 \\ 3 & 6 & 1 & -1 & 2 \end{bmatrix} \xrightarrow{\text{(I)}} \begin{bmatrix} 1 & 2 & 1 & -1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & 1 & -1 \\ 0 & 0 & -2 & 2 & 2 \end{bmatrix} \xrightarrow{\text{(II)}} \begin{bmatrix} 1 & 2 & 0 & -2 & 1 \\ 0 & 0 & 1 & 1 & -1 \\ 0 & 0 & 0 & 4 & 0 \end{bmatrix}$$

$$\xrightarrow{\text{(III)}} \begin{bmatrix} 1 & 2 & 0 & -2 & 1 \\ 0 & 0 & 1 & 1 & -1 \\ 0 & 0 & 0 & 1 & 0 \end{bmatrix} \xrightarrow{\text{(IV)}} \begin{bmatrix} 1 & 2 & 0 & 0 & 1 \\ 0 & 0 & 1 & 0 & -1 \\ 0 & 0 & 0 & 1 & 0 \end{bmatrix}$$

が得られる．ここで，上の各基本変形はそれぞれ

(I) 第 1 行の 2 倍，3 倍をそれぞれ第 2 行，第 3 行から引く．

(II) 第 2 行を第 1 行から引き，第 2 行の 2 倍を第 3 行へ加える．

(III) 第 3 行を 1/4 倍する．

(IV) 第 3 行を第 2 行から引き，第 3 行の 2 倍を第 1 行に加えた．

を行った. ■

((3) について) 行基本変形によって

$$\begin{bmatrix}3&0&1&4&2&3\\0&1&1&5&1&8\\3&-1&-1&2&0&-5\\3&-1&-1&2&-1&-7\\3&0&0&3&1&-1\\0&0&1&1&2&6\end{bmatrix}\xrightarrow{\text{(I)}}\begin{bmatrix}3&0&1&4&2&3\\0&1&1&5&1&8\\0&-1&-2&-2&-2&-8\\0&-1&-2&-2&-3&-10\\0&0&-1&-1&-1&-4\\0&0&1&1&2&6\end{bmatrix}\xrightarrow{\text{(II)}}\begin{bmatrix}3&0&1&4&2&3\\0&1&1&5&1&8\\0&0&-1&3&-1&0\\0&0&-1&3&-2&-2\\0&0&-1&-1&-1&-4\\0&0&1&1&2&6\end{bmatrix}$$

$$\xrightarrow{\text{(III)}}\begin{bmatrix}3&0&0&7&1&3\\0&1&0&8&0&8\\0&0&1&-3&1&0\\0&0&0&0&-1&-2\\0&0&0&-4&0&-4\\0&0&0&4&1&6\end{bmatrix}\xrightarrow{\text{(IV)}}\begin{bmatrix}3&0&0&7&1&3\\0&1&0&8&0&8\\0&0&1&-3&1&0\\0&0&0&1&0&1\\0&0&0&0&1&2\\0&0&0&4&1&6\end{bmatrix}\xrightarrow{\text{(V)}}\begin{bmatrix}3&0&0&0&1&-4\\0&1&0&0&0&0\\0&0&1&0&1&3\\0&0&0&1&0&1\\0&0&0&0&1&2\\0&0&0&0&1&2\end{bmatrix}$$

$$\xrightarrow{\text{(VI)}}\begin{bmatrix}3&0&0&0&0&-6\\0&1&0&0&0&0\\0&0&1&0&0&1\\0&0&0&1&0&1\\0&0&0&0&1&2\\0&0&0&0&0&0\end{bmatrix}\xrightarrow{\text{(VII)}}\begin{bmatrix}1&0&0&0&0&-2\\0&1&0&0&0&0\\0&0&1&0&0&1\\0&0&0&1&0&1\\0&0&0&0&1&2\\0&0&0&0&0&0\end{bmatrix}$$

が得られる. ここで上の各基本変形はそれぞれ

(I) 第 1 行を第 3 行, 第 4 行, 第 5 行からそれぞれ引く.
(II) 第 2 行を第 3 行, 第 4 行にそれぞれ加える.
(III) 第 3 行を第 1 行, 第 2 行, 第 6 行にそれぞれ加え, 第 4 行, 5 行からそれぞれ引いた. 最後に 3 行目を -1 倍している.
(IV) 第 4 行と第 5 行を入れ替えたあと, 第 4 行を $-1/4$ 倍した.
(V) 第 4 行の 7 倍, 8 倍, -3 倍, 4 倍を, それぞれ第 1 行, 第 2 行, 第 3 行, 第 6 行から引いた.
(VI) 第 5 行を第 1 行, 第 3 行, 第 6 行からそれぞれ引いた.
(VII) 第 1 行を 1/3 倍した.

を行った.

■

(ii) 係数行列, 拡大係数行列のそれぞれの階数を調べ, 方程式が「ただ 1 つの解をもつ」,「無数の解をもつ」,「解をもたない」, のいずれか判定せよ. さらに方程式が解をもつ場合は, その解を答えよ.

解答. 以下連立 1 次方程式 (1), (2), (3) それぞれについて, A, $\boldsymbol{x}$, $\boldsymbol{b}$ をそれぞれ対応する係数行列, 未知数ベクトル, 定数項ベクトルとする.

((1) について) (i) の結果より $\operatorname{rank}[A,\boldsymbol{b}]=2\neq 1=\operatorname{rank}A$ とわかるから, 連立 1 次方程式 $A\boldsymbol{x}=\boldsymbol{b}$ は, 解をもたない. ■

((2) について) (i) の結果より, $\operatorname{rank}[A,\boldsymbol{b}]=\operatorname{rank}A=3<4$ (未知数の個数) とわかるから, 連立 1 次方程式 $A\boldsymbol{x}=\boldsymbol{b}$ は無数の解をもつ. 再び (i) の結果より, 連立 1 次方程式 (2) の解は連

立 1 次方程式

$$\begin{cases} x + 2y & & = & 1 \\ & z & = & -1 \\ & & w = & 0 \end{cases}$$

の解と等しいことがわかる．したがって解は

$$\begin{cases} x = 1 - 2c \\ y = \quad c \\ z = \quad -1 \\ w = \quad 0 \end{cases} \quad (c \text{ は任意定数}),$$

あるいはベクトルでは

$$\boldsymbol{x} = \begin{bmatrix} x \\ y \\ z \\ w \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 1-2c \\ c \\ -1 \\ 0 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 1 \\ 0 \\ -1 \\ 0 \end{bmatrix} + c \begin{bmatrix} -2 \\ 1 \\ 0 \\ 0 \end{bmatrix} \quad (c \text{ は任意定数}),$$

と表される． ■

（(3) について）(i) の結果から，$\operatorname{rank}[A, \boldsymbol{b}] = \operatorname{rank} A = 5$ (未知数の個数) とわかるから，連立 1 次方程式 $A\boldsymbol{x} = \boldsymbol{b}$ はただ 1 つの解をもつ．再び (i) の結果からその解は

$$\begin{cases} x_1 = -2 \\ x_2 = 0 \\ x_3 = 1 \\ x_4 = 1 \\ x_5 = 2 \end{cases}$$

とわかる．ベクトルで表すと

$$\boldsymbol{x} = \begin{bmatrix} x_1 \\ x_2 \\ x_3 \\ x_4 \\ x_5 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} -2 \\ 0 \\ 1 \\ 1 \\ 2 \end{bmatrix}.$$

■

問 2. 連立 1 次方程式

$$\begin{cases} x & - & z = & 3 \\ 2x + & y + & (a-2)z = & 7 \\ -x - & ay - & 3(a-1)z = & -4 \end{cases}$$

が，「ただ 1 つの解をもつ」，「無数の解をもつ」，「解をもたない」，ような a の値をそれぞれ求めよ．

解答. 与えられた連立 1 次方程式の係数行列および定数項ベクトルをそれぞれ A を $\boldsymbol{b}$ とする．すなわち

$$A = \begin{bmatrix} 1 & 0 & -1 \\ 2 & 1 & (a-2) \\ -1 & -a & -3(a-1) \end{bmatrix}, \quad \boldsymbol{b} = \begin{bmatrix} 3 \\ 7 \\ -4 \end{bmatrix}.$$

拡大係数行列は，行基本変形を行って

$$[A,\boldsymbol{b}]=\begin{bmatrix}1&0&-1&3\\2&1&(a-2)&7\\-1&-a&-3(a-1)&-4\end{bmatrix}\xrightarrow{\text{(I)}}\begin{bmatrix}1&0&-1&3\\0&1&a&1\\0&-a&-3a+2&-1\end{bmatrix}$$

$$\xrightarrow{\text{(II)}}\begin{bmatrix}1&0&-1&3\\0&1&a&1\\0&0&(a-1)(a-2)&a-1\end{bmatrix}$$

$$=\begin{cases}\begin{bmatrix}1&0&-1&3\\0&1&2&1\\0&0&0&1\end{bmatrix} & (a=2)\\ \begin{bmatrix}1&0&-1&3\\0&1&1&1\\0&0&0&0\end{bmatrix} & (a=1)\\ \begin{bmatrix}1&0&-1&3\\0&1&a&1\\0&0&(a-1)(a-2)&a-1\end{bmatrix}\xrightarrow{\text{(III)}}\begin{bmatrix}1&0&-1&3\\0&1&a&1\\0&0&1&(a-2)^{-1}\end{bmatrix} & (a\neq 2 \text{ かつ } a\neq 1)\end{cases}$$

と変形されることがわかる．ここで上の各基本変形は

(I) 第 1 行の 2 倍を第 2 行から引き，第 1 行を第 3 行に加えた．

(II) 第 2 行の a 倍を第 3 行に加えた．

(III) 第 3 行を $(a-1)(a-2)^{-1}$ 倍した．

である．$a\neq 2$ かつ $a\neq 1$ のときにおける上の基本変形の最後の行列は，$(3,3)$ 成分を軸として第 3 列を掃き出すことにより，その階数は 3 となることがわかる．よって a の値と係数行列および拡大係数行列の階数の対応は

$$\begin{aligned}
&a=2 &&\Leftrightarrow && \operatorname{rank}[A,\boldsymbol{b}]\neq\operatorname{rank}A\\
&a=1 &&\Leftrightarrow && \operatorname{rank}[A,\boldsymbol{b}]=\operatorname{rank}A=2<3\,(\text{方程式の未知数の個数})\\
&a\neq 2 \text{ かつ } a\neq 1 &&\Leftrightarrow && \operatorname{rank}[A,\boldsymbol{b}]=\operatorname{rank}A=3\,(\text{方程式の未知数の個数})
\end{aligned}$$

とわかるから，a の値と連立 1 次方程式の解の対応は，

$$\begin{aligned}
&a=2 &&\Leftrightarrow && \text{解をもたない}\\
&a=1 &&\Leftrightarrow && \text{無数の解をもつ}\\
&a\neq 2 \text{ かつ } a\neq 1 &&\Leftrightarrow && \text{ただ 1 の解をもつ}
\end{aligned}$$

となる． ■

問 3. 3 個の未知数に関する 2 個の方程式からなる連立 1 次方程式であって，無数の解をもち，さらに解の自由度が 1 となるものを 1 つ求めよ．

解答. 例えば解が

$$\begin{cases}x=c\\y=1\\z=2\end{cases}\quad (c\text{ は任意定数})$$

となる連立 1 次方程式を見つければよいので，

$$\begin{cases} \quad y \qquad = 1 \\ 2y - z = 0 \end{cases}$$

など容易に見つけることができるが，ここでは階数に注目して求めてみよう．

3 個の未知数に関する 2 個の方程式からなる連立 1 次方程式の係数行列を A, 定数項ベクトルを $\boldsymbol{b}$ とおくと，A は 2×3 行列，$\boldsymbol{b}$ は 2 次列ベクトルで，拡大係数行列 $[A, \boldsymbol{b}]$ は 2×4 行列である．連立 1 次方程式 $A\boldsymbol{x} = \boldsymbol{b}$ が解をもつための必要十分条件は $\operatorname{rank}[A, \boldsymbol{b}] = \operatorname{rank} A$ であり，加えて解の自由度が 1 となるための必要十分条件は (未知数の個数) $-\operatorname{rank} A = 3 - \operatorname{rank} A = 1$，すなわち $\operatorname{rank} A = 2$ である．よって

$$\operatorname{rank}[A, \boldsymbol{b}] = \operatorname{rank} A = 2 \tag{4}$$

となるような連立 1 次方程式を求めればよい．また，階数の定義と $[A, \boldsymbol{b}]$ が 2×4 行列であるということから

$$\operatorname{rank} A \leq \operatorname{rank}[A, \boldsymbol{b}] \leq 2$$

が成り立つから，結果として $\operatorname{rank} A = 2$ であればどんな $\boldsymbol{b}$ であったとしても (4) が成立することがわかる．結局

$$\operatorname{rank} A = 2$$

をみたす 2×3 行列を求め，それに対応する連立 1 次方程式を答えればよい．階数が 2 となる 2×3 行列とは，行基本変形を行って得られる階段行列が

$$\begin{bmatrix} 1 & 0 & * \\ 0 & 1 & * \end{bmatrix}, \quad \begin{bmatrix} 1 & * & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{bmatrix}, \quad \begin{bmatrix} 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{bmatrix} \tag{5}$$

のいずれかになる 2×3 行列である．基本変形は可逆な操作，すなわち各操作に対して元に戻す行基本変形があることを思い出すと，(5) のいずれかの行列から出発して有限回の行基本変形で得られる 2×3 行列はすべて階数 2 とわかる（逆にどんな階数 2 の 2×3 行列も，(5) のいずれかの行列から出発して有限回の行基本変形で得られることもわかる）．例えば

$$\begin{bmatrix} 1 & 2 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{bmatrix}$$

から出発して，第 2 行に第 1 行の 3 倍を加える，そして第 1 行から第 2 行を引くという基本変形で得られる行列

$$\begin{bmatrix} 1 & 2 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{bmatrix} \to \begin{bmatrix} 1 & 2 & 0 \\ 3 & 6 & 1 \end{bmatrix} \to \begin{bmatrix} -2 & -4 & -1 \\ 3 & 6 & 1 \end{bmatrix}$$

を係数行列としてもち，定数項ベクトル（どんな 2 次列ベクトルでもよい）が

$$\boldsymbol{b} = \begin{bmatrix} 7 \\ 8 \end{bmatrix}$$

である連立 1 次方程式

$$\begin{cases} -2x - 4y - z = 7 \\ \quad 3x + 6y + z = 8 \end{cases}$$

は，無数の解をもち，解の自由度は 1 になることがわかる． ■

問 4. x_0 は連立 1 次方程式 $A\boldsymbol{x} = \boldsymbol{b}$ の 1 つの解とする．以下の問に答えよ．

(i) 方程式 $A\boldsymbol{x} = \boldsymbol{o}$ の任意の解 $\boldsymbol{x}'$ に対して，$x_0 + \boldsymbol{x}'$ は方程式 $A\boldsymbol{x} = \boldsymbol{b}$ の解となることを示せ．

解答． $\boldsymbol{x}'$ を $A\boldsymbol{x} = \boldsymbol{o}$ の任意の解とする．このとき $A\boldsymbol{x}' = \boldsymbol{o}$ である．また，$A\boldsymbol{x_0} = \boldsymbol{b}$ であるから

$$A(\boldsymbol{x}_0 + \boldsymbol{x}') = A\boldsymbol{x}_0 + A\boldsymbol{x}' = \boldsymbol{b} + \boldsymbol{o} = \boldsymbol{b}$$

とわかる．したがって $\boldsymbol{x}_0 + \boldsymbol{x}'$ は，方程式 $A\boldsymbol{x} = \boldsymbol{b}$ の解である． ■

(ii) 方程式 $A\boldsymbol{x} = \boldsymbol{b}$ の任意の解 $\boldsymbol{x}$ に対して，方程式 $A\boldsymbol{x} = \boldsymbol{o}$ の解 $\boldsymbol{x}'$ が存在して，$\boldsymbol{x} = \boldsymbol{x}_0 + \boldsymbol{x}'$ と表されることを示せ．

解答． $\boldsymbol{x}$ を $A\boldsymbol{x} = \boldsymbol{b}$ の任意の解とする．$\boldsymbol{x}' = \boldsymbol{x} - \boldsymbol{x}_0$ とおくと，

$$\boldsymbol{x} = \boldsymbol{x}_0 + \boldsymbol{x}'$$

である．あとは $A\boldsymbol{x}' = \boldsymbol{o}$ となることを示せばよいが，これは

$$A\boldsymbol{x}' = A(\boldsymbol{x} - \boldsymbol{x}_0) = A\boldsymbol{x} - A\boldsymbol{x}_0 = \boldsymbol{b} - \boldsymbol{b} = \boldsymbol{o}$$

と示される． ■