

連立 1 次方程式の解法 問題 3 解答

行列の行基本変形とは

- 操作 $c \cdot r_i$: 第 i 行を c 倍する
- 操作 $r_i + c \cdot r_j$: 第 i 行に第 j 行の c 倍を加える
- 操作 $r_i \leftrightarrow r_j$: 第 i 行と第 j 行を入れ替える

という 3 つの操作だった. この行基本変形を連立方程式に対応する拡大係数行列に施すことにより, 解を求めていく.

1 次の連立方程式の解を求めよ.

$$(1) \begin{cases} x + y + 3z = 0 \\ 2x + 4y + 5z = 0 \\ 3x + 8y + 6z = 0 \end{cases}$$

[解]: この連立方程式の係数行列を A とし, 行基本変形によって変形していくと,

$$\begin{aligned} & \begin{pmatrix} 1 & 1 & 3 \\ 2 & 4 & 5 \\ 3 & 8 & 6 \end{pmatrix} \xrightarrow{r_2 - 2 \cdot r_1} \begin{pmatrix} 1 & 1 & 3 \\ 0 & 2 & -1 \\ 3 & 8 & 6 \end{pmatrix} \xrightarrow{r_3 - 3 \cdot r_1} \begin{pmatrix} 1 & 1 & 3 \\ 0 & 2 & -1 \\ 0 & 5 & -3 \end{pmatrix} \\ & \xrightarrow{\frac{1}{2} \cdot r_2} \begin{pmatrix} 1 & 1 & 3 \\ 0 & 1 & -1/2 \\ 0 & 5 & -3 \end{pmatrix} \xrightarrow{r_1 - 1 \cdot r_2} \begin{pmatrix} 1 & 0 & 7/2 \\ 0 & 1 & -1/2 \\ 0 & 5 & -3 \end{pmatrix} \xrightarrow{r_3 - 5 \cdot r_2} \begin{pmatrix} 1 & 0 & 7/2 \\ 0 & 1 & -1/2 \\ 0 & 0 & -1/2 \end{pmatrix} \\ & \xrightarrow{r_1 + 7 \cdot r_3} \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & -1/2 \\ 0 & 0 & -1/2 \end{pmatrix} \xrightarrow{r_2 - 1 \cdot r_3} \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & -1/2 \end{pmatrix} \xrightarrow{-2 \cdot r_3} \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix} \end{aligned}$$

したがって $\text{rank } A = 3$ より, 求める解は $\begin{pmatrix} x \\ y \\ z \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix}$.

$$(2) \begin{cases} -3w + x + y + z = 0 \\ w - 3x + y + z = 0 \\ w + x - 3y + z = 0 \\ w + x + y - 3z = 0 \end{cases}$$

[解]: この連立方程式の係数行列を A とし, 行基本変形によって変形していくと,

$$\begin{aligned} & \begin{pmatrix} -3 & 1 & 1 & 1 \\ 1 & -3 & 1 & 1 \\ 1 & 1 & -3 & 1 \\ 1 & 1 & 1 & -3 \end{pmatrix} \xrightarrow{r_1+3\cdot r_2} \begin{pmatrix} 0 & -8 & 4 & 4 \\ 1 & -3 & 1 & 1 \\ 1 & 1 & -3 & 1 \\ 1 & 1 & 1 & -3 \end{pmatrix} \\ & \xrightarrow{r_3-1\cdot r_2} \begin{pmatrix} 0 & -8 & 4 & 4 \\ 1 & -3 & 1 & 1 \\ 0 & 4 & -4 & 0 \\ 1 & 1 & 1 & -3 \end{pmatrix} \xrightarrow{r_4-1\cdot r_2} \begin{pmatrix} 0 & -8 & 4 & 4 \\ 1 & -3 & 1 & 1 \\ 0 & 4 & -4 & 0 \\ 0 & 4 & 0 & -4 \end{pmatrix} \\ & \xrightarrow{r_1\leftrightarrow r_2} \begin{pmatrix} 1 & -3 & 1 & 1 \\ 0 & -8 & 4 & 4 \\ 0 & 4 & -4 & 0 \\ 0 & 4 & 0 & -4 \end{pmatrix} \xrightarrow{r_2+2\cdot r_3} \begin{pmatrix} 1 & -3 & 1 & 1 \\ 0 & 0 & -4 & 4 \\ 0 & 4 & -4 & 0 \\ 0 & 4 & 0 & -4 \end{pmatrix} \\ & \xrightarrow{r_4-1\cdot r_3} \begin{pmatrix} 1 & -3 & 1 & 1 \\ 0 & 0 & -4 & 4 \\ 0 & 4 & -4 & 0 \\ 0 & 0 & 4 & -4 \end{pmatrix} \xrightarrow{\frac{1}{4}\cdot r_3} \begin{pmatrix} 1 & -3 & 1 & 1 \\ 0 & 0 & -4 & 4 \\ 0 & 1 & -1 & 0 \\ 0 & 0 & 4 & -4 \end{pmatrix} \\ & \xrightarrow{r_1+3\cdot r_3} \begin{pmatrix} 1 & 0 & -2 & 1 \\ 0 & 0 & -4 & 4 \\ 0 & 1 & -1 & 0 \\ 0 & 0 & 4 & -4 \end{pmatrix} \xrightarrow{r_2\leftrightarrow r_3} \begin{pmatrix} 1 & 0 & -2 & 1 \\ 0 & 1 & -1 & 0 \\ 0 & 0 & -4 & 4 \\ 0 & 0 & 4 & -4 \end{pmatrix} \\ & \xrightarrow{r_4+1\cdot r_3} \begin{pmatrix} 1 & 0 & -2 & 1 \\ 0 & 1 & -1 & 0 \\ 0 & 0 & -4 & 4 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \end{pmatrix} \xrightarrow{-\frac{1}{4}\cdot r_3} \begin{pmatrix} 1 & 0 & -2 & 1 \\ 0 & 1 & -1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & -1 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \end{pmatrix} \\ & \xrightarrow{r_1+2\cdot r_3} \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 & -1 \\ 0 & 1 & -1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & -1 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \end{pmatrix} \xrightarrow{r_2+1\cdot r_3} \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 & -1 \\ 0 & 1 & 0 & -1 \\ 0 & 0 & 1 & -1 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \end{pmatrix} \end{aligned}$$

したがって, 係数行列 A の階段行列は

$$\begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 & -1 \\ 0 & 1 & 0 & -1 \\ 0 & 0 & 1 & -1 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \end{pmatrix}$$

すなわち A の階数は $\text{rank } A = 3$ と求められる.

ここで解の自由度は $4 - 3 = 1$ となるため, 一般解に含まれるパラメータの個数は 1 個と分かる. 階段行列の表す連立方程式は

$$\begin{cases} w - z = 0 \\ x - z = 0 \\ y - z = 0 \end{cases}$$

したがって、パラメータを $z = c_1$ とすると、求める解は

$$\begin{pmatrix} w \\ x \\ y \\ z \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} c_1 \\ c_1 \\ c_1 \\ c_1 \end{pmatrix} = c_1 \begin{pmatrix} 1 \\ 1 \\ 1 \\ 1 \end{pmatrix}.$$

$$(3) \begin{cases} 3w - 6x + 5y + 8z = 0 \\ 2w - 4x + 7y - 2z = 0 \\ w - 2x + 2y + 2z = 0 \end{cases}$$

[解]: この連立方程式の係数行列を A とし, 行基本変形によって変形していくと,

$$\begin{aligned} & \begin{pmatrix} 3 & -6 & 5 & 8 \\ 2 & -4 & 7 & -2 \\ 1 & -2 & 2 & 2 \end{pmatrix} \xrightarrow{r_1-3\cdot r_3} \begin{pmatrix} 0 & 0 & -1 & 2 \\ 2 & -4 & 7 & -2 \\ 1 & -2 & 2 & 2 \end{pmatrix} \\ & \xrightarrow{r_2-2\cdot r_3} \begin{pmatrix} 0 & 0 & -1 & 2 \\ 0 & 0 & 3 & -6 \\ 1 & -2 & 2 & 2 \end{pmatrix} \xrightarrow{r_1 \leftrightarrow r_3} \begin{pmatrix} 1 & -2 & 2 & 2 \\ 0 & 0 & 3 & -6 \\ 0 & 0 & -1 & 2 \end{pmatrix} \\ & \xrightarrow{r_1+2\cdot r_3} \begin{pmatrix} 1 & -2 & 0 & 6 \\ 0 & 0 & 3 & -6 \\ 0 & 0 & -1 & 2 \end{pmatrix} \xrightarrow{r_2+3\cdot r_3} \begin{pmatrix} 1 & -2 & 0 & 6 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & -1 & 2 \end{pmatrix} \\ & \xrightarrow{-1\cdot r_3} \begin{pmatrix} 1 & -2 & 0 & 6 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & -2 \end{pmatrix} \xrightarrow{r_2 \leftrightarrow r_3} \begin{pmatrix} 1 & -2 & 0 & 6 \\ 0 & 0 & 1 & -2 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \end{pmatrix} \end{aligned}$$

したがって, 係数行列 A の階段行列は

$$\begin{pmatrix} 1 & -2 & 0 & 6 \\ 0 & 0 & 1 & -2 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \end{pmatrix}$$

すなわち A の階数は $\text{rank } A = 2$ と求められる.

ここで解の自由度は $4 - 2 = 2$ となるため, 一般解に含まれるパラメータの個数は 2 個と分かる. 階段行列の表す連立方程式は

$$\begin{cases} w - 2x + 6z = 0 \\ y - 2z = 0 \end{cases}$$

したがって, パラメータを $x = c_1, z = c_2$ とすると, 求める解は

$$\begin{pmatrix} w \\ x \\ y \\ z \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 2c_1 - 6c_2 \\ c_1 \\ 2c_2 \\ c_2 \end{pmatrix} = c_1 \begin{pmatrix} 2 \\ 1 \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix} + c_2 \begin{pmatrix} -6 \\ 0 \\ 2 \\ 1 \end{pmatrix}.$$