連立 1 次方程式の解法　問題 2　解答

行列の**行基本変形**とは

- 操作 $c \cdot r_i$:　　第 i 行を c 倍する
- 操作 $r_i + c \cdot r_j$:　第 i 行に第 j 行の c 倍を加える
- 操作 $r_i \leftrightarrow r_j$:　第 i 行と第 j 行を入れ替える

という 3 つの操作だった. この行基本変形を連立方程式に対応する拡大係数行列に施すことにより, 解を求めていく.

$\boxed{1}$ 次の連立方程式の解を求めよ.

$$(1) \begin{cases} x + y - z = 2 \\ 3x + 4y - z = 7 \\ -2x + y + 8z = -1 \end{cases}$$

[解]:　この連立方程式の係数行列を A, 右辺の定数ベクトルを $\mathbf{b}$, 拡大係数行列を $[A, \mathbf{b}]$ とすると,

$$A = \begin{pmatrix} 1 & 1 & -1 \\ 3 & 4 & -1 \\ -2 & 1 & 8 \end{pmatrix}, \quad \mathbf{b} = \begin{pmatrix} 2 \\ 7 \\ -1 \end{pmatrix}, \quad [A, \mathbf{b}] = \begin{pmatrix} 1 & 1 & -1 & 2 \\ 3 & 4 & -1 & 7 \\ -2 & 1 & 8 & -1 \end{pmatrix}.$$

拡大係数行列 $[A, \mathbf{b}]$ を行基本変形によって変形していくと,

$$\begin{pmatrix} 1 & 1 & -1 & 2 \\ 3 & 4 & -1 & 7 \\ -2 & 1 & 8 & -1 \end{pmatrix} \xrightarrow{r_2 - 3 \cdot r_1} \begin{pmatrix} 1 & 1 & -1 & 2 \\ 0 & 1 & 2 & 1 \\ -2 & 1 & 8 & -1 \end{pmatrix}$$
$$\xrightarrow{r_3 + 2 \cdot r_1} \begin{pmatrix} 1 & 1 & -1 & 2 \\ 0 & 1 & 2 & 1 \\ 0 & 3 & 6 & 3 \end{pmatrix} \xrightarrow{r_1 - 1 \cdot r_2} \begin{pmatrix} 1 & 0 & -3 & 1 \\ 0 & 1 & 2 & 1 \\ 0 & 3 & 6 & 3 \end{pmatrix}$$
$$\xrightarrow{r_3 - 3 \cdot r_2} \begin{pmatrix} 1 & 0 & -3 & 1 \\ 0 & 1 & 2 & 1 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \end{pmatrix}$$

したがって, 拡大係数行列 $[A, \mathbf{b}]$ の階段行列は

$$\begin{pmatrix} 1 & 0 & -3 & 1 \\ 0 & 1 & 2 & 1 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \end{pmatrix}$$

すなわち $[A, \mathbf{b}]$ の階数は $\operatorname{rank}[A, \mathbf{b}] = 2$ と求められる.
ここで解の自由度は $3 - 2 = 1$ となるため, 一般解に含まれるパラメータの個数は 1 個と分かる. 階段行列の表す連立方程式は

$$\begin{cases} x - 3z = 1 \\ y + 2z = 1 \end{cases}$$

したがって, パラメータを $z = c_1$ とすると, 求める解は

$$\begin{pmatrix} x \\ y \\ z \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 3c_1 + 1 \\ 1 - 2c_1 \\ c_1 \end{pmatrix} = c_1 \begin{pmatrix} 3 \\ -2 \\ 1 \end{pmatrix} + \begin{pmatrix} 1 \\ 1 \\ 0 \end{pmatrix}.$$

(2) $\begin{cases} 3x - 6y + 5z = 8 \\ -2x + 4y - 7z = 2 \\ x - 2y + 2z = 2 \end{cases}$

[解]:　この連立方程式の係数行列を A, 右辺の定数ベクトルを $\mathbf{b}$, 拡大係数行列を $[A, \mathbf{b}]$ とすると,

$$A = \begin{pmatrix} 3 & -6 & 5 \\ -2 & 4 & -7 \\ 1 & -2 & 2 \end{pmatrix}, \quad \mathbf{b} = \begin{pmatrix} 8 \\ 2 \\ 2 \end{pmatrix}, \quad [A, \mathbf{b}] = \begin{pmatrix} 3 & -6 & 5 & 8 \\ -2 & 4 & -7 & 2 \\ 1 & -2 & 2 & 2 \end{pmatrix}.$$

拡大係数行列 $[A, \mathbf{b}]$ を行基本変形によって変形していくと,

$$\begin{aligned} &\begin{pmatrix} 3 & -6 & 5 & 8 \\ -2 & 4 & -7 & 2 \\ 1 & -2 & 2 & 2 \end{pmatrix} \xrightarrow{r_1 - 3 \cdot r_3} \begin{pmatrix} 0 & 0 & -1 & 2 \\ -2 & 4 & -7 & 2 \\ 1 & -2 & 2 & 2 \end{pmatrix} \\ &\xrightarrow{r_2 + 2 \cdot r_3} \begin{pmatrix} 0 & 0 & -1 & 2 \\ 0 & 0 & -3 & 6 \\ 1 & -2 & 2 & 2 \end{pmatrix} \xrightarrow{r_1 \leftrightarrow r_3} \begin{pmatrix} 1 & -2 & 2 & 2 \\ 0 & 0 & -3 & 6 \\ 0 & 0 & -1 & 2 \end{pmatrix} \\ &\xrightarrow{-\frac{1}{3} \cdot r_2} \begin{pmatrix} 1 & -2 & 2 & 2 \\ 0 & 0 & 1 & -2 \\ 0 & 0 & -1 & 2 \end{pmatrix} \xrightarrow{r_1 - 2 \cdot r_2} \begin{pmatrix} 1 & -2 & 0 & 6 \\ 0 & 0 & 1 & -2 \\ 0 & 0 & -1 & 2 \end{pmatrix} \\ &\xrightarrow{r_3 + 1 \cdot r_2} \begin{pmatrix} 1 & -2 & 0 & 6 \\ 0 & 0 & 1 & -2 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \end{pmatrix} \end{aligned}$$

したがって, 拡大係数行列 $[A, \mathbf{b}]$ の階段行列は

$$\begin{pmatrix} 1 & -2 & 0 & 6 \\ 0 & 0 & 1 & -2 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \end{pmatrix}$$

すなわち $[A, \mathbf{b}]$ の階数は $\operatorname{rank}[A, \mathbf{b}] = 2$ と求められる.
ここで解の自由度は $3 - 2 = 1$ となるため, 一般解に含まれるパラメータの個数は 1 個と分かる. 階段行列の表す連立方程式は

$$\begin{cases} x - 2y = 6 \\ \qquad z = -2 \end{cases}$$

したがって, パラメータを $y = c_1$ とすると, 求める解は

$$\begin{pmatrix} x \\ y \\ z \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 2c_1 + 6 \\ c_1 \\ -2 \end{pmatrix} = c_1 \begin{pmatrix} 2 \\ 1 \\ 0 \end{pmatrix} + \begin{pmatrix} 6 \\ 0 \\ -2 \end{pmatrix}.$$

(3) $\begin{cases} 2x + y + 3z = 3 \\ 6x + 3y + 9z = 9 \\ -4x - 2y - 6z = -6 \end{cases}$

[解]:　この連立方程式の係数行列を A, 右辺の定数ベクトルを $\mathbf{b}$, 拡大係数行列を $[A, \mathbf{b}]$ とすると,

$$A = \begin{pmatrix} 2 & 1 & 3 \\ 6 & 3 & 9 \\ -4 & -2 & -6 \end{pmatrix}, \quad \mathbf{b} = \begin{pmatrix} 3 \\ 9 \\ -6 \end{pmatrix}, \quad [A, \mathbf{b}] = \begin{pmatrix} 2 & 1 & 3 & 3 \\ 6 & 3 & 9 & 9 \\ -4 & -2 & -6 & -6 \end{pmatrix}.$$

拡大係数行列 $[A, \mathbf{b}]$ を行基本変形によって変形していくと,

$$\begin{pmatrix} 2 & 1 & 3 & 3 \\ 6 & 3 & 9 & 9 \\ -4 & -2 & -6 & -6 \end{pmatrix} \xrightarrow{r_2 - 3\cdot r_1} \begin{pmatrix} 2 & 1 & 3 & 3 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \\ -4 & -2 & -6 & -6 \end{pmatrix}$$
$$\xrightarrow{r_3 + 2\cdot r_1} \begin{pmatrix} 2 & 1 & 3 & 3 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \end{pmatrix} \xrightarrow{\frac{1}{2}\cdot r_1} \begin{pmatrix} 1 & 1/2 & 3/2 & 3/2 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \end{pmatrix}$$

したがって, 拡大係数行列 $[A, \mathbf{b}]$ の階段行列は

$$\begin{pmatrix} 1 & 1/2 & 3/2 & 3/2 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \end{pmatrix}$$

すなわち $[A, \mathbf{b}]$ の階数は $\operatorname{rank}[A, \mathbf{b}] = 1$ と求められる.
ここで解の自由度は $3 - 1 = 2$ となるため, 一般解に含まれるパラメータの個数は 2 個と分かる. 階段行列の表す連立方程式は

$$\begin{cases} x + \dfrac{y}{2} + \dfrac{3z}{2} = \dfrac{3}{2} \end{cases}$$

したがって, パラメータを $y = c_1$, $z = c_2$ とすると, 求める解は

$$\begin{pmatrix} x \\ y \\ z \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} -\frac{c_1}{2} - \frac{3c_2}{2} + \frac{3}{2} \\ c_1 \\ c_2 \end{pmatrix} = c_1 \begin{pmatrix} -\frac{1}{2} \\ 1 \\ 0 \end{pmatrix} + c_2 \begin{pmatrix} -\frac{3}{2} \\ 0 \\ 1 \end{pmatrix} + \begin{pmatrix} \frac{3}{2} \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix}.$$

(4) $\begin{cases} 2x+2y-5z=7 \\ -x-y-z=14 \\ -x-y+5z=-1 \end{cases}$

[解]: この連立方程式の係数行列を A, 右辺の定数ベクトルを $\mathbf{b}$, 拡大係数行列を $[A,\mathbf{b}]$ とすると,

$$A=\begin{pmatrix} 2 & 2 & -5 \\ -1 & -1 & -1 \\ -1 & -1 & 5 \end{pmatrix}, \quad \mathbf{b}=\begin{pmatrix} 7 \\ 14 \\ -1 \end{pmatrix}, \quad [A,\mathbf{b}]=\begin{pmatrix} 2 & 2 & -5 & 7 \\ -1 & -1 & -1 & 14 \\ -1 & -1 & 5 & -1 \end{pmatrix}.$$

拡大係数行列 $[A,\mathbf{b}]$ を行基本変形によって変形していくと,

$$\begin{pmatrix} 2 & 2 & -5 & 7 \\ -1 & -1 & -1 & 14 \\ -1 & -1 & 5 & -1 \end{pmatrix} \xrightarrow{r_1+2\cdot r_3} \begin{pmatrix} 0 & 0 & 5 & 5 \\ -1 & -1 & -1 & 14 \\ -1 & -1 & 5 & -1 \end{pmatrix}$$

$$\xrightarrow{r_2-1\cdot r_3} \begin{pmatrix} 0 & 0 & 5 & 5 \\ 0 & 0 & -6 & 15 \\ -1 & -1 & 5 & -1 \end{pmatrix} \xrightarrow{-1\cdot r_3} \begin{pmatrix} 0 & 0 & 5 & 5 \\ 0 & 0 & -6 & 15 \\ 1 & 1 & -5 & 1 \end{pmatrix}$$

$$\xrightarrow{r_1\leftrightarrow r_3} \begin{pmatrix} 1 & 1 & -5 & 1 \\ 0 & 0 & -6 & 15 \\ 0 & 0 & 5 & 5 \end{pmatrix} \xrightarrow{r_1+1\cdot r_3} \begin{pmatrix} 1 & 1 & 0 & 6 \\ 0 & 0 & -6 & 15 \\ 0 & 0 & 5 & 5 \end{pmatrix}$$

$$\xrightarrow{\frac{1}{5}\cdot r_3} \begin{pmatrix} 1 & 1 & 0 & 6 \\ 0 & 0 & -6 & 15 \\ 0 & 0 & 1 & 1 \end{pmatrix} \xrightarrow{r_2+6\cdot r_3} \begin{pmatrix} 1 & 1 & 0 & 6 \\ 0 & 0 & 0 & 21 \\ 0 & 0 & 1 & 1 \end{pmatrix}$$

$$\xrightarrow{r_2\leftrightarrow r_3} \begin{pmatrix} 1 & 1 & 0 & 6 \\ 0 & 0 & 1 & 1 \\ 0 & 0 & 0 & 21 \end{pmatrix} \xrightarrow{\frac{1}{21}\cdot r_3} \begin{pmatrix} 1 & 1 & 0 & 6 \\ 0 & 0 & 1 & 1 \\ 0 & 0 & 0 & 1 \end{pmatrix}$$

$$\xrightarrow{r_1-6\cdot r_3} \begin{pmatrix} 1 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & 1 \\ 0 & 0 & 0 & 1 \end{pmatrix} \xrightarrow{r_2-1\cdot r_3} \begin{pmatrix} 1 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1 \end{pmatrix}$$

したがって, 拡大係数行列 $[A,\mathbf{b}]$ の階段行列は

$$\begin{pmatrix} 1 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1 \end{pmatrix}$$

すなわち $[A,\mathbf{b}]$ の階数は $\operatorname{rank}[A,\mathbf{b}]=3$ と求められる.
一方, 係数行列 A の階数は $\operatorname{rank}A=2$ である. したがって $\operatorname{rank}A<\operatorname{rank}[A,\mathbf{b}]$ となるため, 連立方程式に解は存在しない.

(5) $\begin{cases} 4x + 2y + 6z = 7 \\ 2x + 3y + 13z = 8 \\ x + 3y + 14z = 6 \end{cases}$

[解]: この連立方程式の係数行列を A, 右辺の定数ベクトルを $\mathbf{b}$, 拡大係数行列を $[A, \mathbf{b}]$ とすると,

$$A = \begin{pmatrix} 4 & 2 & 6 \\ 2 & 3 & 13 \\ 1 & 3 & 14 \end{pmatrix}, \quad \mathbf{b} = \begin{pmatrix} 7 \\ 8 \\ 6 \end{pmatrix}, \quad [A, \mathbf{b}] = \begin{pmatrix} 4 & 2 & 6 & 7 \\ 2 & 3 & 13 & 8 \\ 1 & 3 & 14 & 6 \end{pmatrix}.$$

拡大係数行列 $[A, \mathbf{b}]$ を行基本変形によって変形していくと,

$$\begin{pmatrix} 4 & 2 & 6 & 7 \\ 2 & 3 & 13 & 8 \\ 1 & 3 & 14 & 6 \end{pmatrix} \xrightarrow{r_1 - 4 \cdot r_3} \begin{pmatrix} 0 & -10 & -50 & -17 \\ 2 & 3 & 13 & 8 \\ 1 & 3 & 14 & 6 \end{pmatrix}$$
$$\xrightarrow{r_2 - 2 \cdot r_3} \begin{pmatrix} 0 & -10 & -50 & -17 \\ 0 & -3 & -15 & -4 \\ 1 & 3 & 14 & 6 \end{pmatrix} \xrightarrow{r_1 \leftrightarrow r_3} \begin{pmatrix} 1 & 3 & 14 & 6 \\ 0 & -3 & -15 & -4 \\ 0 & -10 & -50 & -17 \end{pmatrix}$$
$$\xrightarrow{r_1 + 1 \cdot r_2} \begin{pmatrix} 1 & 0 & -1 & 2 \\ 0 & -3 & -15 & -4 \\ 0 & -10 & -50 & -17 \end{pmatrix} \xrightarrow{-\frac{1}{3} \cdot r_2} \begin{pmatrix} 1 & 0 & -1 & 2 \\ 0 & 1 & 5 & 4/3 \\ 0 & -10 & -50 & -17 \end{pmatrix}$$
$$\xrightarrow{r_3 + 10 \cdot r_2} \begin{pmatrix} 1 & 0 & -1 & 2 \\ 0 & 1 & 5 & 4/3 \\ 0 & 0 & 0 & -11/3 \end{pmatrix} \xrightarrow{-\frac{3}{11} \cdot r_3} \begin{pmatrix} 1 & 0 & -1 & 2 \\ 0 & 1 & 5 & 4/3 \\ 0 & 0 & 0 & 1 \end{pmatrix}$$
$$\xrightarrow{r_1 - 2 \cdot r_3} \begin{pmatrix} 1 & 0 & -1 & 0 \\ 0 & 1 & 5 & 4/3 \\ 0 & 0 & 0 & 1 \end{pmatrix} \xrightarrow{r_2 - \frac{4}{3} \cdot r_3} \begin{pmatrix} 1 & 0 & -1 & 0 \\ 0 & 1 & 5 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1 \end{pmatrix}$$

したがって, 拡大係数行列 $[A, \mathbf{b}]$ の階段行列は

$$\begin{pmatrix} 1 & 0 & -1 & 0 \\ 0 & 1 & 5 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1 \end{pmatrix}$$

すなわち $[A, \mathbf{b}]$ の階数は $\operatorname{rank}[A, \mathbf{b}] = 3$ と求められる.
一方, 係数行列 A の階数は $\operatorname{rank} A = 2$ である. したがって $\operatorname{rank} A < \operatorname{rank}[A, \mathbf{b}]$ となるため, 連立方程式に解は存在しない.

$\boxed{2}$ 次の連立方程式の解を求めよ.

(1) $\begin{cases} 2w+2x+4y+3z=5 \\ 2w+3x+10y+8z=8 \\ -2w+x+8y+3z=1 \\ -2w-x+2y+2z=-2 \end{cases}$

[解]: この連立方程式の係数行列を A, 右辺の定数ベクトルを $\mathbf{b}$, 拡大係数行列を $[A,\mathbf{b}]$ とすると,

$$A=\begin{pmatrix} 2 & 2 & 4 & 3 \\ 2 & 3 & 10 & 8 \\ -2 & 1 & 8 & 3 \\ -2 & -1 & 2 & 2 \end{pmatrix}, \quad \mathbf{b}=\begin{pmatrix} 5 \\ 8 \\ 1 \\ -2 \end{pmatrix}, \quad [A,\mathbf{b}]=\begin{pmatrix} 2 & 2 & 4 & 3 & 5 \\ 2 & 3 & 10 & 8 & 8 \\ -2 & 1 & 8 & 3 & 1 \\ -2 & -1 & 2 & 2 & -2 \end{pmatrix}.$$

拡大係数行列 $[A,\mathbf{b}]$ を行基本変形によって変形していくと,

$$\begin{aligned}
&\begin{pmatrix} 2 & 2 & 4 & 3 & 5 \\ 2 & 3 & 10 & 8 & 8 \\ -2 & 1 & 8 & 3 & 1 \\ -2 & -1 & 2 & 2 & -2 \end{pmatrix} \xrightarrow{r_2-1\cdot r_1} \begin{pmatrix} 2 & 2 & 4 & 3 & 5 \\ 0 & 1 & 6 & 5 & 3 \\ -2 & 1 & 8 & 3 & 1 \\ -2 & -1 & 2 & 2 & -2 \end{pmatrix} \\
\xrightarrow{r_3+1\cdot r_1} &\begin{pmatrix} 2 & 2 & 4 & 3 & 5 \\ 0 & 1 & 6 & 5 & 3 \\ 0 & 3 & 12 & 6 & 6 \\ -2 & -1 & 2 & 2 & -2 \end{pmatrix} \xrightarrow{r_4+1\cdot r_1} \begin{pmatrix} 2 & 2 & 4 & 3 & 5 \\ 0 & 1 & 6 & 5 & 3 \\ 0 & 3 & 12 & 6 & 6 \\ 0 & 1 & 6 & 5 & 3 \end{pmatrix} \\
\xrightarrow{\frac{1}{2}\cdot r_1} &\begin{pmatrix} 1 & 1 & 2 & 3/2 & 5/2 \\ 0 & 1 & 6 & 5 & 3 \\ 0 & 3 & 12 & 6 & 6 \\ 0 & 1 & 6 & 5 & 3 \end{pmatrix} \xrightarrow{r_1-1\cdot r_2} \begin{pmatrix} 1 & 0 & -4 & -7/2 & -1/2 \\ 0 & 1 & 6 & 5 & 3 \\ 0 & 3 & 12 & 6 & 6 \\ 0 & 1 & 6 & 5 & 3 \end{pmatrix} \\
\xrightarrow{r_3-3\cdot r_2} &\begin{pmatrix} 1 & 0 & -4 & -7/2 & -1/2 \\ 0 & 1 & 6 & 5 & 3 \\ 0 & 0 & -6 & -9 & -3 \\ 0 & 1 & 6 & 5 & 3 \end{pmatrix} \xrightarrow{r_4-1\cdot r_2} \begin{pmatrix} 1 & 0 & -4 & -7/2 & -1/2 \\ 0 & 1 & 6 & 5 & 3 \\ 0 & 0 & -6 & -9 & -3 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \end{pmatrix} \\
\xrightarrow{r_2+1\cdot r_3} &\begin{pmatrix} 1 & 0 & -4 & -7/2 & -1/2 \\ 0 & 1 & 0 & -4 & 0 \\ 0 & 0 & -6 & -9 & -3 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \end{pmatrix} \xrightarrow{-\frac{1}{6}\cdot r_3} \begin{pmatrix} 1 & 0 & -4 & -7/2 & -1/2 \\ 0 & 1 & 0 & -4 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & 3/2 & 1/2 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \end{pmatrix} \\
\xrightarrow{r_1+4\cdot r_3} &\begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 & 5/2 & 3/2 \\ 0 & 1 & 0 & -4 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & 3/2 & 1/2 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \end{pmatrix}
\end{aligned}$$

したがって, 拡大係数行列 $[A,\mathbf{b}]$ の階段行列は

$$\begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 & 5/2 & 3/2 \\ 0 & 1 & 0 & -4 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & 3/2 & 1/2 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \end{pmatrix}$$

すなわち $[A,\mathbf{b}]$ の階数は $\operatorname{rank}[A,\mathbf{b}]=3$ と求められる.

ここで解の自由度は $4-3=1$ となるため, 一般解に含まれるパラメータの個数は 1 個と分かる. 階段行列の表す連立方程式は

$$\begin{cases} w+\dfrac{5z}{2}=\dfrac{3}{2} \\ x-4z=0 \\ y+\dfrac{3z}{2}=\dfrac{1}{2} \end{cases}$$

したがって, パラメータを $z=c_1$ とすると, 求める解は

$$\begin{pmatrix} w \\ x \\ y \\ z \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} \frac{3}{2}-\frac{5c_1}{2} \\ 4c_1 \\ \frac{1}{2}-\frac{3c_1}{2} \\ c_1 \end{pmatrix} = c_1 \begin{pmatrix} -\frac{5}{2} \\ 4 \\ -\frac{3}{2} \\ 1 \end{pmatrix} + \begin{pmatrix} \frac{3}{2} \\ 0 \\ \frac{1}{2} \\ 0 \end{pmatrix}.$$

(2) $\begin{cases} w+3x-2y+z=1 \\ 3w+9x-5y+5z=9 \\ 2w+6x-3y+4z=8 \\ w+3x+5z=13 \end{cases}$

[解]: この連立方程式の係数行列を A, 右辺の定数ベクトルを $\mathbf{b}$, 拡大係数行列を $[A,\mathbf{b}]$ とすると,

$$A=\begin{pmatrix}1&3&-2&1\\3&9&-5&5\\2&6&-3&4\\1&3&0&5\end{pmatrix},\quad \mathbf{b}=\begin{pmatrix}1\\9\\8\\13\end{pmatrix},\quad [A,\mathbf{b}]=\begin{pmatrix}1&3&-2&1&1\\3&9&-5&5&9\\2&6&-3&4&8\\1&3&0&5&13\end{pmatrix}.$$

拡大係数行列 $[A,\mathbf{b}]$ を行基本変形によって変形していくと,

$$\begin{pmatrix}1&3&-2&1&1\\3&9&-5&5&9\\2&6&-3&4&8\\1&3&0&5&13\end{pmatrix}\xrightarrow{r_2-3\cdot r_1}\begin{pmatrix}1&3&-2&1&1\\0&0&1&2&6\\2&6&-3&4&8\\1&3&0&5&13\end{pmatrix}$$

$$\xrightarrow{r_3-2\cdot r_1}\begin{pmatrix}1&3&-2&1&1\\0&0&1&2&6\\0&0&1&2&6\\1&3&0&5&13\end{pmatrix}\xrightarrow{r_4-1\cdot r_1}\begin{pmatrix}1&3&-2&1&1\\0&0&1&2&6\\0&0&1&2&6\\0&0&2&4&12\end{pmatrix}$$

$$\xrightarrow{r_1+2\cdot r_2}\begin{pmatrix}1&3&0&5&13\\0&0&1&2&6\\0&0&1&2&6\\0&0&2&4&12\end{pmatrix}\xrightarrow{r_3-1\cdot r_2}\begin{pmatrix}1&3&0&5&13\\0&0&1&2&6\\0&0&0&0&0\\0&0&2&4&12\end{pmatrix}$$

$$\xrightarrow{r_4-2\cdot r_2}\begin{pmatrix}1&3&0&5&13\\0&0&1&2&6\\0&0&0&0&0\\0&0&0&0&0\end{pmatrix}$$

したがって, 拡大係数行列 $[A,\mathbf{b}]$ の階段行列は

$$\begin{pmatrix}1&3&0&5&13\\0&0&1&2&6\\0&0&0&0&0\\0&0&0&0&0\end{pmatrix}$$

すなわち $[A,\mathbf{b}]$ の階数は $\operatorname{rank}[A,\mathbf{b}]=2$ と求められる.

ここで解の自由度は $4-2=2$ となるため, 一般解に含まれるパラメータの個数は 2 個と分かる. 階段行列の表す連立方程式は

$$\begin{cases} w+3x+5z=13 \\ y+2z=6 \end{cases}$$

したがって, パラメータを $x = c_1,\ z = c_2$ とすると, 求める解は

$$\begin{pmatrix} w \\ x \\ y \\ z \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} -3c_1 - 5c_2 + 13 \\ c_1 \\ 6 - 2c_2 \\ c_2 \end{pmatrix} = c_1 \begin{pmatrix} -3 \\ 1 \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix} + c_2 \begin{pmatrix} -5 \\ 0 \\ -2 \\ 1 \end{pmatrix} + \begin{pmatrix} 13 \\ 0 \\ 6 \\ 0 \end{pmatrix}.$$

(3) $\begin{cases} w+2x+y+6z=-1 \\ -w-2x+2y+10z=2 \\ w+2x-7y-26z=-4 \\ 2w+4x-3y-8z=-2 \end{cases}$

[解]: この連立方程式の係数行列を A, 右辺の定数ベクトルを $\mathbf{b}$, 拡大係数行列を $[A,\mathbf{b}]$ とすると,

$$A=\begin{pmatrix} 1 & 2 & 1 & 6 \\ -1 & -2 & 2 & 10 \\ 1 & 2 & -7 & -26 \\ 2 & 4 & -3 & -8 \end{pmatrix}, \quad \mathbf{b}=\begin{pmatrix} -1 \\ 2 \\ -4 \\ -2 \end{pmatrix}, \quad [A,\mathbf{b}]=\begin{pmatrix} 1 & 2 & 1 & 6 & -1 \\ -1 & -2 & 2 & 10 & 2 \\ 1 & 2 & -7 & -26 & -4 \\ 2 & 4 & -3 & -8 & -2 \end{pmatrix}.$$

拡大係数行列 $[A,\mathbf{b}]$ を行基本変形によって変形していくと,

$$\begin{pmatrix} 1 & 2 & 1 & 6 & -1 \\ -1 & -2 & 2 & 10 & 2 \\ 1 & 2 & -7 & -26 & -4 \\ 2 & 4 & -3 & -8 & -2 \end{pmatrix} \xrightarrow{r_2+1\cdot r_1} \begin{pmatrix} 1 & 2 & 1 & 6 & -1 \\ 0 & 0 & 3 & 16 & 1 \\ 1 & 2 & -7 & -26 & -4 \\ 2 & 4 & -3 & -8 & -2 \end{pmatrix}$$

$$\xrightarrow{r_3-1\cdot r_1} \begin{pmatrix} 1 & 2 & 1 & 6 & -1 \\ 0 & 0 & 3 & 16 & 1 \\ 0 & 0 & -8 & -32 & -3 \\ 2 & 4 & -3 & -8 & -2 \end{pmatrix} \xrightarrow{r_4-2\cdot r_1} \begin{pmatrix} 1 & 2 & 1 & 6 & -1 \\ 0 & 0 & 3 & 16 & 1 \\ 0 & 0 & -8 & -32 & -3 \\ 0 & 0 & -5 & -20 & 0 \end{pmatrix}$$

$$\xrightarrow{-\frac{1}{5}\cdot r_4} \begin{pmatrix} 1 & 2 & 1 & 6 & -1 \\ 0 & 0 & 3 & 16 & 1 \\ 0 & 0 & -8 & -32 & -3 \\ 0 & 0 & 1 & 4 & 0 \end{pmatrix} \xrightarrow{r_1-1\cdot r_4} \begin{pmatrix} 1 & 2 & 0 & 2 & -1 \\ 0 & 0 & 3 & 16 & 1 \\ 0 & 0 & -8 & -32 & -3 \\ 0 & 0 & 1 & 4 & 0 \end{pmatrix}$$

$$\xrightarrow{r_2-3\cdot r_4} \begin{pmatrix} 1 & 2 & 0 & 2 & -1 \\ 0 & 0 & 0 & 4 & 1 \\ 0 & 0 & -8 & -32 & -3 \\ 0 & 0 & 1 & 4 & 0 \end{pmatrix} \xrightarrow{r_3+8\cdot r_4} \begin{pmatrix} 1 & 2 & 0 & 2 & -1 \\ 0 & 0 & 0 & 4 & 1 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & -3 \\ 0 & 0 & 1 & 4 & 0 \end{pmatrix}$$

$$\xrightarrow{r_2\leftrightarrow r_4} \begin{pmatrix} 1 & 2 & 0 & 2 & -1 \\ 0 & 0 & 1 & 4 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & -3 \\ 0 & 0 & 0 & 4 & 1 \end{pmatrix} \xrightarrow{r_2-1\cdot r_4} \begin{pmatrix} 1 & 2 & 0 & 2 & -1 \\ 0 & 0 & 1 & 0 & -1 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & -3 \\ 0 & 0 & 0 & 4 & 1 \end{pmatrix}$$

$$\xrightarrow{\frac{1}{4}\cdot r_4} \begin{pmatrix} 1 & 2 & 0 & 2 & -1 \\ 0 & 0 & 1 & 0 & -1 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & -3 \\ 0 & 0 & 0 & 1 & 1/4 \end{pmatrix} \xrightarrow{r_1-2\cdot r_4} \begin{pmatrix} 1 & 2 & 0 & 0 & -3/2 \\ 0 & 0 & 1 & 0 & -1 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & -3 \\ 0 & 0 & 0 & 1 & 1/4 \end{pmatrix}$$

$$\xrightarrow{r_3\leftrightarrow r_4} \begin{pmatrix} 1 & 2 & 0 & 0 & -3/2 \\ 0 & 0 & 1 & 0 & -1 \\ 0 & 0 & 0 & 1 & 1/4 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & -3 \end{pmatrix} \xrightarrow{-\frac{1}{3}\cdot r_4} \begin{pmatrix} 1 & 2 & 0 & 0 & -3/2 \\ 0 & 0 & 1 & 0 & -1 \\ 0 & 0 & 0 & 1 & 1/4 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 1 \end{pmatrix}$$

$$\xrightarrow{r_1+\frac{3}{2}\cdot r_4} \begin{pmatrix} 1 & 2 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & 0 & -1 \\ 0 & 0 & 0 & 1 & 1/4 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 1 \end{pmatrix} \xrightarrow{r_2+1\cdot r_4} \begin{pmatrix} 1 & 2 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1 & 1/4 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 1 \end{pmatrix}$$

$$\xrightarrow{r_3-\frac{1}{4}\cdot r_4} \begin{pmatrix} 1 & 2 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 1 \end{pmatrix}$$

したがって, 拡大係数行列 $[A, \mathbf{b}]$ の階段行列は

$$\begin{pmatrix} 1 & 2 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 1 \end{pmatrix}$$

すなわち $[A, \mathbf{b}]$ の階数は $\operatorname{rank}[A, \mathbf{b}] = 4$ と求められる.
一方, 係数行列 A の階数は $\operatorname{rank} A = 3$ である. したがって $\operatorname{rank} A < \operatorname{rank}[A, \mathbf{b}]$ となるため, 連立方程式に解は存在しない.

(4) $\begin{cases} \ \ 2w+3x-5y-13z=5 \\ \ \ w-4x-19y+21z=-3 \\ -2w+7x+35y-37z=5 \\ \ \ -w-5x-8y+24z=-6 \end{cases}$

[解]: この連立方程式の係数行列を A, 右辺の定数ベクトルを $\mathbf{b}$, 拡大係数行列を $[A, \mathbf{b}]$ とすると,

$$A = \begin{pmatrix} 2 & 3 & -5 & -13 \\ 1 & -4 & -19 & 21 \\ -2 & 7 & 35 & -37 \\ -1 & -5 & -8 & 24 \end{pmatrix}, \quad \mathbf{b} = \begin{pmatrix} 5 \\ -3 \\ 5 \\ -6 \end{pmatrix}, \quad [A, \mathbf{b}] = \begin{pmatrix} 2 & 3 & -5 & -13 & 5 \\ 1 & -4 & -19 & 21 & -3 \\ -2 & 7 & 35 & -37 & 5 \\ -1 & -5 & -8 & 24 & -6 \end{pmatrix}.$$

拡大係数行列 $[A, \mathbf{b}]$ を行基本変形によって変形していくと,

$$\begin{pmatrix} 2 & 3 & -5 & -13 & 5 \\ 1 & -4 & -19 & 21 & -3 \\ -2 & 7 & 35 & -37 & 5 \\ -1 & -5 & -8 & 24 & -6 \end{pmatrix} \xrightarrow{r_1 - 2 \cdot r_2} \begin{pmatrix} 0 & 11 & 33 & -55 & 11 \\ 1 & -4 & -19 & 21 & -3 \\ -2 & 7 & 35 & -37 & 5 \\ -1 & -5 & -8 & 24 & -6 \end{pmatrix}$$

$$\xrightarrow{r_3 + 2 \cdot r_2} \begin{pmatrix} 0 & 11 & 33 & -55 & 11 \\ 1 & -4 & -19 & 21 & -3 \\ 0 & -1 & -3 & 5 & -1 \\ -1 & -5 & -8 & 24 & -6 \end{pmatrix} \xrightarrow{r_4 + 1 \cdot r_2} \begin{pmatrix} 0 & 11 & 33 & -55 & 11 \\ 1 & -4 & -19 & 21 & -3 \\ 0 & -1 & -3 & 5 & -1 \\ 0 & -9 & -27 & 45 & -9 \end{pmatrix}$$

$$\xrightarrow{r_1 \leftrightarrow r_2} \begin{pmatrix} 1 & -4 & -19 & 21 & -3 \\ 0 & 11 & 33 & -55 & 11 \\ 0 & -1 & -3 & 5 & -1 \\ 0 & -9 & -27 & 45 & -9 \end{pmatrix} \xrightarrow{r_1 - 4 \cdot r_3} \begin{pmatrix} 1 & 0 & -7 & 1 & 1 \\ 0 & 11 & 33 & -55 & 11 \\ 0 & -1 & -3 & 5 & -1 \\ 0 & -9 & -27 & 45 & -9 \end{pmatrix}$$

$$\xrightarrow{r_2 + 11 \cdot r_3} \begin{pmatrix} 1 & 0 & -7 & 1 & 1 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & -1 & -3 & 5 & -1 \\ 0 & -9 & -27 & 45 & -9 \end{pmatrix} \xrightarrow{r_4 - 9 \cdot r_3} \begin{pmatrix} 1 & 0 & -7 & 1 & 1 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & -1 & -3 & 5 & -1 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \end{pmatrix}$$

$$\xrightarrow{-1 \cdot r_3} \begin{pmatrix} 1 & 0 & -7 & 1 & 1 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 3 & -5 & 1 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \end{pmatrix} \xrightarrow{r_2 \leftrightarrow r_3} \begin{pmatrix} 1 & 0 & -7 & 1 & 1 \\ 0 & 1 & 3 & -5 & 1 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \end{pmatrix}$$

したがって, 拡大係数行列 $[A, \mathbf{b}]$ の階段行列は

$$\begin{pmatrix} 1 & 0 & -7 & 1 & 1 \\ 0 & 1 & 3 & -5 & 1 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \end{pmatrix}$$

すなわち $[A, \mathbf{b}]$ の階数は $\operatorname{rank}[A, \mathbf{b}] = 2$ と求められる.

ここで解の自由度は $4 - 2 = 2$ となるため, 一般解に含まれるパラメータの個数は 2 個と分かる. 階段行列の表す連立方程式は

$$\begin{cases} \ w - 7y + z = 1 \\ x + 3y - 5z = 1 \end{cases}$$

したがって, パラメータを $y = c_1,\ z = c_2$ とすると, 求める解は

$$\begin{pmatrix} w \\ x \\ y \\ z \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 7c_1 - c_2 + 1 \\ -3c_1 + 5c_2 + 1 \\ c_1 \\ c_2 \end{pmatrix} = c_1 \begin{pmatrix} 7 \\ -3 \\ 1 \\ 0 \end{pmatrix} + c_2 \begin{pmatrix} -1 \\ 5 \\ 0 \\ 1 \end{pmatrix} + \begin{pmatrix} 1 \\ 1 \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix}.$$

(5) $\begin{cases} 2w - x - 8y - 2z = 8 \\ 3w - 7x - 23y + 2z = 6 \\ -5w + 12x + 39y - 9z = -15 \\ 2w - 2x - 10y - 3z = 5 \end{cases}$

[解]: この連立方程式の係数行列を A, 右辺の定数ベクトルを $\mathbf{b}$, 拡大係数行列を $[A, \mathbf{b}]$ とすると,

$$A = \begin{pmatrix} 2 & -1 & -8 & -2 \\ 3 & -7 & -23 & 2 \\ -5 & 12 & 39 & -9 \\ 2 & -2 & -10 & -3 \end{pmatrix}, \quad \mathbf{b} = \begin{pmatrix} 8 \\ 6 \\ -15 \\ 5 \end{pmatrix}, \quad [A, \mathbf{b}] = \begin{pmatrix} 2 & -1 & -8 & -2 & 8 \\ 3 & -7 & -23 & 2 & 6 \\ -5 & 12 & 39 & -9 & -15 \\ 2 & -2 & -10 & -3 & 5 \end{pmatrix}.$$

拡大係数行列 $[A, \mathbf{b}]$ を行基本変形によって変形していくと,

$$\begin{pmatrix} 2 & -1 & -8 & -2 & 8 \\ 3 & -7 & -23 & 2 & 6 \\ -5 & 12 & 39 & -9 & -15 \\ 2 & -2 & -10 & -3 & 5 \end{pmatrix} \xrightarrow{r_4 - 1 \cdot r_1} \begin{pmatrix} 2 & -1 & -8 & -2 & 8 \\ 3 & -7 & -23 & 2 & 6 \\ -5 & 12 & 39 & -9 & -15 \\ 0 & -1 & -2 & -1 & -3 \end{pmatrix}$$

$$\xrightarrow{\frac{1}{2} \cdot r_1} \begin{pmatrix} 1 & -1/2 & -4 & -1 & 4 \\ 3 & -7 & -23 & 2 & 6 \\ -5 & 12 & 39 & -9 & -15 \\ 0 & -1 & -2 & -1 & -3 \end{pmatrix} \xrightarrow{r_2 - 3 \cdot r_1} \begin{pmatrix} 1 & -1/2 & -4 & -1 & 4 \\ 0 & -11/2 & -11 & 5 & -6 \\ -5 & 12 & 39 & -9 & -15 \\ 0 & -1 & -2 & -1 & -3 \end{pmatrix}$$

$$\xrightarrow{r_3 + 5 \cdot r_1} \begin{pmatrix} 1 & -1/2 & -4 & -1 & 4 \\ 0 & -11/2 & -11 & 5 & -6 \\ 0 & 19/2 & 19 & -14 & 5 \\ 0 & -1 & -2 & -1 & -3 \end{pmatrix} \xrightarrow{-1 \cdot r_4} \begin{pmatrix} 1 & -1/2 & -4 & -1 & 4 \\ 0 & -11/2 & -11 & 5 & -6 \\ 0 & 19/2 & 19 & -14 & 5 \\ 0 & 1 & 2 & 1 & 3 \end{pmatrix}$$

$$\xrightarrow{r_1 + \frac{1}{2} \cdot r_4} \begin{pmatrix} 1 & 0 & -3 & -1/2 & 11/2 \\ 0 & -11/2 & -11 & 5 & -6 \\ 0 & 19/2 & 19 & -14 & 5 \\ 0 & 1 & 2 & 1 & 3 \end{pmatrix} \xrightarrow{r_2 + \frac{11}{2} \cdot r_4} \begin{pmatrix} 1 & 0 & -3 & -1/2 & 11/2 \\ 0 & 0 & 0 & 21/2 & 21/2 \\ 0 & 19/2 & 19 & -14 & 5 \\ 0 & 1 & 2 & 1 & 3 \end{pmatrix}$$

$$\xrightarrow{r_3 - \frac{19}{2} \cdot r_4} \begin{pmatrix} 1 & 0 & -3 & -1/2 & 11/2 \\ 0 & 0 & 0 & 21/2 & 21/2 \\ 0 & 0 & 0 & -47/2 & -47/2 \\ 0 & 1 & 2 & 1 & 3 \end{pmatrix} \xrightarrow{r_2 \leftrightarrow r_4} \begin{pmatrix} 1 & 0 & -3 & -1/2 & 11/2 \\ 0 & 1 & 2 & 1 & 3 \\ 0 & 0 & 0 & -47/2 & -47/2 \\ 0 & 0 & 0 & 21/2 & 21/2 \end{pmatrix}$$

$$\xrightarrow{-\frac{2}{47} \cdot r_3} \begin{pmatrix} 1 & 0 & -3 & -1/2 & 11/2 \\ 0 & 1 & 2 & 1 & 3 \\ 0 & 0 & 0 & 1 & 1 \\ 0 & 0 & 0 & 21/2 & 21/2 \end{pmatrix} \xrightarrow{r_1 + \frac{1}{2} \cdot r_3} \begin{pmatrix} 1 & 0 & -3 & 0 & 6 \\ 0 & 1 & 2 & 1 & 3 \\ 0 & 0 & 0 & 1 & 1 \\ 0 & 0 & 0 & 21/2 & 21/2 \end{pmatrix}$$

$$\xrightarrow{r_2 - 1 \cdot r_3} \begin{pmatrix} 1 & 0 & -3 & 0 & 6 \\ 0 & 1 & 2 & 0 & 2 \\ 0 & 0 & 0 & 1 & 1 \\ 0 & 0 & 0 & 21/2 & 21/2 \end{pmatrix} \xrightarrow{r_4 - \frac{21}{2} \cdot r_3} \begin{pmatrix} 1 & 0 & -3 & 0 & 6 \\ 0 & 1 & 2 & 0 & 2 \\ 0 & 0 & 0 & 1 & 1 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \end{pmatrix}$$

したがって, 拡大係数行列 $[A, \mathbf{b}]$ の階段行列は

$$\begin{pmatrix} 1 & 0 & -3 & 0 & 6 \\ 0 & 1 & 2 & 0 & 2 \\ 0 & 0 & 0 & 1 & 1 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \end{pmatrix}$$

すなわち $[A, \mathbf{b}]$ の階数は $\mathrm{rank}\,[A, \mathbf{b}] = 3$ と求められる.
ここで解の自由度は $4 - 3 = 1$ となるため, 一般解に含まれるパラメータの個数は 1 個と分かる. 階段行列の表す連立方程式は

$$\begin{cases} w - 3y = 6 \\ x + 2y = 2 \\ \qquad\;\; z = 1 \end{cases}$$

したがって, パラメータを $y = c_1$ とすると, 求める解は

$$\begin{pmatrix} w \\ x \\ y \\ z \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 3c_1 + 6 \\ 2 - 2c_1 \\ c_1 \\ 1 \end{pmatrix} = c_1 \begin{pmatrix} 3 \\ -2 \\ 1 \\ 0 \end{pmatrix} + \begin{pmatrix} 6 \\ 2 \\ 0 \\ 1 \end{pmatrix}.$$