連立1次方程式の解法　問題1　解答

行列の**行基本変形**とは
- 操作 $c \cdot [i]$:　第 i 行を c 倍する
- 操作 $[i] + c \cdot [j]$:　第 i 行に第 j 行の c 倍を加える
- 操作 $[i, j]$:　第 i 行と第 j 行を入れ替える

という3つの操作だった. この行基本変形を連立方程式に対応する拡大係数行列に施すことにより, 解を求めていく.

$\boxed{1}$ 次の連立方程式の解を求めよ.

(1) $\begin{cases} x + 2y + 3z = 1 \\ 3x + 5y + 6z = 1 \\ x + 4y + 8z = 1 \end{cases}$

[解]: この連立方程式の係数行列を A, 右辺の定数ベクトルを $\mathbf{b}$ とすると,

$$A = \begin{pmatrix} 1 & 2 & 3 \\ 3 & 5 & 6 \\ 1 & 4 & 8 \end{pmatrix}, \quad \mathbf{b} = \begin{pmatrix} 1 \\ 1 \\ 1 \end{pmatrix}$$

で, その拡大係数行列は

$$(A, \mathbf{b}) = \begin{pmatrix} 1 & 2 & 3 & 1 \\ 3 & 5 & 6 & 1 \\ 1 & 4 & 8 & 1 \end{pmatrix}$$

となる. 拡大係数行列 $(A, \mathbf{b})$ を行基本変形によって変形していくと,

$$\begin{pmatrix} 1 & 2 & 3 & 1 \\ 3 & 5 & 6 & 1 \\ 1 & 4 & 8 & 1 \end{pmatrix} \xrightarrow{[3]-1\cdot[1]} \begin{pmatrix} 1 & 2 & 3 & 1 \\ 3 & 5 & 6 & 1 \\ 0 & 2 & 5 & 0 \end{pmatrix} \xrightarrow{[2]-3\cdot[1]} \begin{pmatrix} 1 & 2 & 3 & 1 \\ 0 & -1 & -3 & -2 \\ 0 & 2 & 5 & 0 \end{pmatrix}$$

$$\xrightarrow{[1]+2\cdot[2]} \begin{pmatrix} 1 & 0 & -3 & -3 \\ 0 & -1 & -3 & -2 \\ 0 & 2 & 5 & 0 \end{pmatrix} \xrightarrow{[3]+2\cdot[2]} \begin{pmatrix} 1 & 0 & -3 & -3 \\ 0 & -1 & -3 & -2 \\ 0 & 0 & -1 & -4 \end{pmatrix} \xrightarrow{-1\cdot[2]} \begin{pmatrix} 1 & 0 & -3 & -3 \\ 0 & 1 & 3 & 2 \\ 0 & 0 & -1 & -4 \end{pmatrix}$$

$$\xrightarrow{-1\cdot[3]} \begin{pmatrix} 1 & 0 & -3 & -3 \\ 0 & 1 & 3 & 2 \\ 0 & 0 & 1 & 4 \end{pmatrix} \xrightarrow{[1]+3\cdot[3]} \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 & 9 \\ 0 & 1 & 3 & 2 \\ 0 & 0 & 1 & 4 \end{pmatrix} \xrightarrow{[2]-3\cdot[3]} \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 & 9 \\ 0 & 1 & 0 & -10 \\ 0 & 0 & 1 & 4 \end{pmatrix}$$

したがって求める解は $\begin{pmatrix} x \\ y \\ z \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 9 \\ -10 \\ 4 \end{pmatrix}$.

(2) $\begin{cases} x + y + z = 1 \\ x + 2y + 3z = 0 \\ x + 4y + 9z = 0 \end{cases}$

[解]: この連立方程式の係数行列を A, 右辺の定数ベクトルを $\mathbf{b}$ とすると,

$$A = \begin{pmatrix} 1 & 1 & 1 \\ 1 & 2 & 3 \\ 1 & 4 & 9 \end{pmatrix}, \quad \mathbf{b} = \begin{pmatrix} 1 \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix}$$

で, その拡大係数行列は

$$(A, \mathbf{b}) = \begin{pmatrix} 1 & 1 & 1 & 1 \\ 1 & 2 & 3 & 0 \\ 1 & 4 & 9 & 0 \end{pmatrix}$$

となる. 拡大係数行列 $(A, \mathbf{b})$ を行基本変形によって変形していくと,

$$\begin{pmatrix} 1 & 1 & 1 & 1 \\ 1 & 2 & 3 & 0 \\ 1 & 4 & 9 & 0 \end{pmatrix} \xrightarrow{[2]-1\cdot[1]} \begin{pmatrix} 1 & 1 & 1 & 1 \\ 0 & 1 & 2 & -1 \\ 1 & 4 & 9 & 0 \end{pmatrix} \xrightarrow{[3]-1\cdot[1]} \begin{pmatrix} 1 & 1 & 1 & 1 \\ 0 & 1 & 2 & -1 \\ 0 & 3 & 8 & -1 \end{pmatrix}$$

$$\xrightarrow{[1]-1\cdot[2]} \begin{pmatrix} 1 & 0 & -1 & 2 \\ 0 & 1 & 2 & -1 \\ 0 & 3 & 8 & -1 \end{pmatrix} \xrightarrow{[3]-3\cdot[2]} \begin{pmatrix} 1 & 0 & -1 & 2 \\ 0 & 1 & 2 & -1 \\ 0 & 0 & 2 & 2 \end{pmatrix} \xrightarrow{\frac{1}{2}\cdot[3]} \begin{pmatrix} 1 & 0 & -1 & 2 \\ 0 & 1 & 2 & -1 \\ 0 & 0 & 1 & 1 \end{pmatrix}$$

$$\xrightarrow{[1]+1\cdot[3]} \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 & 3 \\ 0 & 1 & 2 & -1 \\ 0 & 0 & 1 & 1 \end{pmatrix} \xrightarrow{[2]-2\cdot[3]} \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 & 3 \\ 0 & 1 & 0 & -3 \\ 0 & 0 & 1 & 1 \end{pmatrix}$$

したがって求める解は $\begin{pmatrix} x \\ y \\ z \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 3 \\ -3 \\ 1 \end{pmatrix}$.

(3) $\begin{cases} y + 2z = 1 \\ x + z = 1 \\ 2x + y = 1 \end{cases}$

[解]: この連立方程式の係数行列を A, 右辺の定数ベクトルを $\mathbf{b}$ とすると,

$$A = \begin{pmatrix} 0 & 1 & 2 \\ 1 & 0 & 1 \\ 2 & 1 & 0 \end{pmatrix}, \quad \mathbf{b} = \begin{pmatrix} 1 \\ 1 \\ 1 \end{pmatrix}$$

で, その拡大係数行列は

$$(A, \mathbf{b}) = \begin{pmatrix} 0 & 1 & 2 & 1 \\ 1 & 0 & 1 & 1 \\ 2 & 1 & 0 & 1 \end{pmatrix}$$

となる. 拡大係数行列 $(A, \mathbf{b})$ を行基本変形によって変形していくと,

$$\begin{pmatrix} 0 & 1 & 2 & 1 \\ 1 & 0 & 1 & 1 \\ 2 & 1 & 0 & 1 \end{pmatrix} \xrightarrow{[3]-2\cdot[2]} \begin{pmatrix} 0 & 1 & 2 & 1 \\ 1 & 0 & 1 & 1 \\ 0 & 1 & -2 & -1 \end{pmatrix} \xrightarrow{[1,2]} \begin{pmatrix} 1 & 0 & 1 & 1 \\ 0 & 1 & 2 & 1 \\ 0 & 1 & -2 & -1 \end{pmatrix}$$

$$\xrightarrow{[3]-1\cdot[2]} \begin{pmatrix} 1 & 0 & 1 & 1 \\ 0 & 1 & 2 & 1 \\ 0 & 0 & -4 & -2 \end{pmatrix} \xrightarrow{-\frac{1}{4}\cdot[3]} \begin{pmatrix} 1 & 0 & 1 & 1 \\ 0 & 1 & 2 & 1 \\ 0 & 0 & 1 & \frac{1}{2} \end{pmatrix} \xrightarrow{[2]-2\cdot[3]} \begin{pmatrix} 1 & 0 & 1 & 1 \\ 0 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & \frac{1}{2} \end{pmatrix}$$

$$\xrightarrow{[1]-1\cdot[3]} \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 & \frac{1}{2} \\ 0 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & \frac{1}{2} \end{pmatrix}$$

したがって求める解は $\begin{pmatrix} x \\ y \\ z \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} \frac{1}{2} \\ 0 \\ \frac{1}{2} \end{pmatrix}$.

(4) $\begin{cases} 3x - y + 2z = -2 \\ 2x + 2y - 5z = 3 \\ x + 5y + 2z = 6 \end{cases}$

[解]: この連立方程式の係数行列を A, 右辺の定数ベクトルを $\mathbf{b}$ とすると,

$$A = \begin{pmatrix} 3 & -1 & 2 \\ 2 & 2 & -5 \\ 1 & 5 & 2 \end{pmatrix}, \quad \mathbf{b} = \begin{pmatrix} -2 \\ 3 \\ 6 \end{pmatrix}$$

で, その拡大係数行列は

$$(A, \mathbf{b}) = \begin{pmatrix} 3 & -1 & 2 & -2 \\ 2 & 2 & -5 & 3 \\ 1 & 5 & 2 & 6 \end{pmatrix}$$

となる. 拡大係数行列 $(A, \mathbf{b})$ を行基本変形によって変形していくと,

$$\begin{pmatrix} 3 & -1 & 2 & -2 \\ 2 & 2 & -5 & 3 \\ 1 & 5 & 2 & 6 \end{pmatrix} \xrightarrow{[1]-3\cdot[3]} \begin{pmatrix} 0 & -16 & -4 & -20 \\ 2 & 2 & -5 & 3 \\ 1 & 5 & 2 & 6 \end{pmatrix} \xrightarrow{[2]-2\cdot[3]} \begin{pmatrix} 0 & -16 & -4 & -20 \\ 0 & -8 & -9 & -9 \\ 1 & 5 & 2 & 6 \end{pmatrix}$$

$$\xrightarrow{[1,3]} \begin{pmatrix} 1 & 5 & 2 & 6 \\ 0 & -8 & -9 & -9 \\ 0 & -16 & -4 & -20 \end{pmatrix} \xrightarrow{-\frac{1}{4}\cdot[3]} \begin{pmatrix} 1 & 5 & 2 & 6 \\ 0 & -8 & -9 & -9 \\ 0 & 4 & 1 & 5 \end{pmatrix} \xrightarrow{[2]+2\cdot[3]} \begin{pmatrix} 1 & 5 & 2 & 6 \\ 0 & 0 & -7 & 1 \\ 0 & 4 & 1 & 5 \end{pmatrix}$$

$$\xrightarrow{[2,3]} \begin{pmatrix} 1 & 5 & 2 & 6 \\ 0 & 4 & 1 & 5 \\ 0 & 0 & -7 & 1 \end{pmatrix} \xrightarrow{-\frac{1}{7}\cdot[3]} \begin{pmatrix} 1 & 5 & 2 & 6 \\ 0 & 4 & 1 & 5 \\ 0 & 0 & 1 & -\frac{1}{7} \end{pmatrix} \xrightarrow{[2]-1\cdot[3]} \begin{pmatrix} 1 & 5 & 2 & 6 \\ 0 & 4 & 0 & \frac{36}{7} \\ 0 & 0 & 1 & -\frac{1}{7} \end{pmatrix}$$

$$\xrightarrow{[1]-2\cdot[3]} \begin{pmatrix} 1 & 5 & 0 & \frac{44}{7} \\ 0 & 4 & 0 & \frac{36}{7} \\ 0 & 0 & 1 & -\frac{1}{7} \end{pmatrix} \xrightarrow{\frac{1}{4}\cdot[2]} \begin{pmatrix} 1 & 5 & 0 & \frac{44}{7} \\ 0 & 1 & 0 & \frac{9}{7} \\ 0 & 0 & 1 & -\frac{1}{7} \end{pmatrix} \xrightarrow{[1]-5\cdot[2]} \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 & -\frac{1}{7} \\ 0 & 1 & 0 & \frac{9}{7} \\ 0 & 0 & 1 & -\frac{1}{7} \end{pmatrix}$$

したがって求める解は $\begin{pmatrix} x \\ y \\ z \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} -\frac{1}{7} \\ \frac{9}{7} \\ -\frac{1}{7} \end{pmatrix}$.

(5) $\begin{cases} 3x + 2y - z = -3 \\ 2x - y - 2z = 3 \\ -x - 2y + 3z = -3 \end{cases}$

[解]: この連立方程式の係数行列を A, 右辺の定数ベクトルを $\mathbf{b}$ とすると,

$$A = \begin{pmatrix} 3 & 2 & -1 \\ 2 & -1 & -2 \\ -1 & -2 & 3 \end{pmatrix}, \quad \mathbf{b} = \begin{pmatrix} -3 \\ 3 \\ -3 \end{pmatrix}$$

で, その拡大係数行列は

$$(A, \mathbf{b}) = \begin{pmatrix} 3 & 2 & -1 & -3 \\ 2 & -1 & -2 & 3 \\ -1 & -2 & 3 & -3 \end{pmatrix}$$

となる. 拡大係数行列 $(A, \mathbf{b})$ を行基本変形によって変形していくと,

$$\begin{pmatrix} 3 & 2 & -1 & -3 \\ 2 & -1 & -2 & 3 \\ -1 & -2 & 3 & -3 \end{pmatrix} \xrightarrow{[1]+3\cdot[3]} \begin{pmatrix} 0 & -4 & 8 & -12 \\ 2 & -1 & -2 & 3 \\ -1 & -2 & 3 & -3 \end{pmatrix} \xrightarrow{[2]+2\cdot[3]} \begin{pmatrix} 0 & -4 & 8 & -12 \\ 0 & -5 & 4 & -3 \\ -1 & -2 & 3 & -3 \end{pmatrix}$$

$$\xrightarrow{[1,3]} \begin{pmatrix} -1 & -2 & 3 & -3 \\ 0 & -5 & 4 & -3 \\ 0 & -4 & 8 & -12 \end{pmatrix} \xrightarrow{-1\cdot[1]} \begin{pmatrix} 1 & 2 & -3 & 3 \\ 0 & -5 & 4 & -3 \\ 0 & -4 & 8 & -12 \end{pmatrix} \xrightarrow{-\frac{1}{4}\cdot[3]} \begin{pmatrix} 1 & 2 & -3 & 3 \\ 0 & -5 & 4 & -3 \\ 0 & 1 & -2 & 3 \end{pmatrix}$$

$$\xrightarrow{[2]+5\cdot[3]} \begin{pmatrix} 1 & 2 & -3 & 3 \\ 0 & 0 & -6 & 12 \\ 0 & 1 & -2 & 3 \end{pmatrix} \xrightarrow{[1]-2\cdot[3]} \begin{pmatrix} 1 & 0 & 1 & -3 \\ 0 & 0 & -6 & 12 \\ 0 & 1 & -2 & 3 \end{pmatrix} \xrightarrow{[2,3]} \begin{pmatrix} 1 & 0 & 1 & -3 \\ 0 & 1 & -2 & 3 \\ 0 & 0 & -6 & 12 \end{pmatrix}$$

$$\xrightarrow{-\frac{1}{6}\cdot[3]} \begin{pmatrix} 1 & 0 & 1 & -3 \\ 0 & 1 & -2 & 3 \\ 0 & 0 & 1 & -2 \end{pmatrix} \xrightarrow{[1]-1\cdot[3]} \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 & -1 \\ 0 & 1 & -2 & 3 \\ 0 & 0 & 1 & -2 \end{pmatrix} \xrightarrow{[2]+2\cdot[3]} \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 & -1 \\ 0 & 1 & 0 & -1 \\ 0 & 0 & 1 & -2 \end{pmatrix}$$

したがって求める解は $\begin{pmatrix} x \\ y \\ z \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} -1 \\ -1 \\ -2 \end{pmatrix}$.

$\boxed{2}$ 次の連立方程式の解を求めよ.

(1) $\begin{cases} 3w + 2x + y = 1 \\ 3x + 2y + z = 2 \\ w + 2x + 3y = 3 \\ x + 2y + 3z = 2 \end{cases}$

[解]: この連立方程式の係数行列を A, 右辺の定数ベクトルを $\mathbf{b}$ とすると,

$$A = \begin{pmatrix} 3 & 2 & 1 & 0 \\ 0 & 3 & 2 & 1 \\ 1 & 2 & 3 & 0 \\ 0 & 1 & 2 & 3 \end{pmatrix}, \quad \mathbf{b} = \begin{pmatrix} 1 \\ 2 \\ 3 \\ 2 \end{pmatrix}$$

で, その拡大係数行列は

$$(A, \mathbf{b}) = \begin{pmatrix} 3 & 2 & 1 & 0 & 1 \\ 0 & 3 & 2 & 1 & 2 \\ 1 & 2 & 3 & 0 & 3 \\ 0 & 1 & 2 & 3 & 2 \end{pmatrix}$$

となる. 拡大係数行列 $(A, \mathbf{b})$ を行基本変形によって変形していくと,

$$\begin{pmatrix} 3 & 2 & 1 & 0 & 1 \\ 0 & 3 & 2 & 1 & 2 \\ 1 & 2 & 3 & 0 & 3 \\ 0 & 1 & 2 & 3 & 2 \end{pmatrix} \xrightarrow{[1]-3\cdot[3]} \begin{pmatrix} 0 & -4 & -8 & 0 & -8 \\ 0 & 3 & 2 & 1 & 2 \\ 1 & 2 & 3 & 0 & 3 \\ 0 & 1 & 2 & 3 & 2 \end{pmatrix}$$

$$\xrightarrow{[1,3]} \begin{pmatrix} 1 & 2 & 3 & 0 & 3 \\ 0 & 3 & 2 & 1 & 2 \\ 0 & -4 & -8 & 0 & -8 \\ 0 & 1 & 2 & 3 & 2 \end{pmatrix} \xrightarrow{[3]+4\cdot[4]} \begin{pmatrix} 1 & 2 & 3 & 0 & 3 \\ 0 & 3 & 2 & 1 & 2 \\ 0 & 0 & 0 & 12 & 0 \\ 0 & 1 & 2 & 3 & 2 \end{pmatrix}$$

$$\xrightarrow{[2]-3\cdot[4]} \begin{pmatrix} 1 & 2 & 3 & 0 & 3 \\ 0 & 0 & -4 & -8 & -4 \\ 0 & 0 & 0 & 12 & 0 \\ 0 & 1 & 2 & 3 & 2 \end{pmatrix} \xrightarrow{[1]-2\cdot[4]} \begin{pmatrix} 1 & 0 & -1 & -6 & -1 \\ 0 & 0 & -4 & -8 & -4 \\ 0 & 0 & 0 & 12 & 0 \\ 0 & 1 & 2 & 3 & 2 \end{pmatrix}$$

$$\xrightarrow{[2,4]} \begin{pmatrix} 1 & 0 & -1 & -6 & -1 \\ 0 & 1 & 2 & 3 & 2 \\ 0 & 0 & 0 & 12 & 0 \\ 0 & 0 & -4 & -8 & -4 \end{pmatrix} \xrightarrow{[3,4]} \begin{pmatrix} 1 & 0 & -1 & -6 & -1 \\ 0 & 1 & 2 & 3 & 2 \\ 0 & 0 & -4 & -8 & -4 \\ 0 & 0 & 0 & 12 & 0 \end{pmatrix}$$

$$\xrightarrow{-\frac{1}{4}\cdot[3]} \begin{pmatrix} 1 & 0 & -1 & -6 & -1 \\ 0 & 1 & 2 & 3 & 2 \\ 0 & 0 & 1 & 2 & 1 \\ 0 & 0 & 0 & 12 & 0 \end{pmatrix} \xrightarrow{[1]+1\cdot[3]} \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 & -4 & 0 \\ 0 & 1 & 2 & 3 & 2 \\ 0 & 0 & 1 & 2 & 1 \\ 0 & 0 & 0 & 12 & 0 \end{pmatrix}$$

$$\xrightarrow{[2]-2\cdot[3]} \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 & -4 & 0 \\ 0 & 1 & 0 & -1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & 2 & 1 \\ 0 & 0 & 0 & 12 & 0 \end{pmatrix} \xrightarrow{\frac{1}{12}\cdot[4]} \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 & -4 & 0 \\ 0 & 1 & 0 & -1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & 2 & 1 \\ 0 & 0 & 0 & 1 & 0 \end{pmatrix}$$

$$\xrightarrow{[1]+4\cdot[4]} \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 & -1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & 2 & 1 \\ 0 & 0 & 0 & 1 & 0 \end{pmatrix} \xrightarrow{[2]+1\cdot[4]} \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & 2 & 1 \\ 0 & 0 & 0 & 1 & 0 \end{pmatrix}$$

$$\xrightarrow{[3]-2\cdot[4]} \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & 0 & 1 \\ 0 & 0 & 0 & 1 & 0 \end{pmatrix}$$

したがって求める解は $\begin{pmatrix} w \\ x \\ y \\ z \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ 1 \\ 0 \end{pmatrix}$.

(2) $\begin{cases} 2w+x+y=1 \\ 4w+2x+2y+z=-1 \\ 2w-2y+z=1 \\ 3x+8y+3z=-1 \end{cases}$

[解]: この連立方程式の係数行列を A, 右辺の定数ベクトルを $\mathbf{b}$ とすると,

$$A=\begin{pmatrix} 2 & 1 & 1 & 0 \\ 4 & 2 & 2 & 1 \\ 2 & 0 & -2 & 1 \\ 0 & 3 & 8 & 3 \end{pmatrix}, \quad \mathbf{b}=\begin{pmatrix} 1 \\ -1 \\ 1 \\ -1 \end{pmatrix}$$

で, その拡大係数行列は

$$(A,\mathbf{b})=\begin{pmatrix} 2 & 1 & 1 & 0 & 1 \\ 4 & 2 & 2 & 1 & -1 \\ 2 & 0 & -2 & 1 & 1 \\ 0 & 3 & 8 & 3 & -1 \end{pmatrix}$$

となる. 拡大係数行列 $(A,\mathbf{b})$ を行基本変形によって変形していくと,

$$\begin{pmatrix} 2 & 1 & 1 & 0 & 1 \\ 4 & 2 & 2 & 1 & -1 \\ 2 & 0 & -2 & 1 & 1 \\ 0 & 3 & 8 & 3 & -1 \end{pmatrix} \xrightarrow{[2]-2\cdot[1]} \begin{pmatrix} 2 & 1 & 1 & 0 & 1 \\ 0 & 0 & 0 & 1 & -3 \\ 2 & 0 & -2 & 1 & 1 \\ 0 & 3 & 8 & 3 & -1 \end{pmatrix}$$

$$\xrightarrow{[3]-1\cdot[1]} \begin{pmatrix} 2 & 1 & 1 & 0 & 1 \\ 0 & 0 & 0 & 1 & -3 \\ 0 & -1 & -3 & 1 & 0 \\ 0 & 3 & 8 & 3 & -1 \end{pmatrix} \xrightarrow{[1]+1\cdot[3]} \begin{pmatrix} 2 & 0 & -2 & 1 & 1 \\ 0 & 0 & 0 & 1 & -3 \\ 0 & -1 & -3 & 1 & 0 \\ 0 & 3 & 8 & 3 & -1 \end{pmatrix}$$

$$\xrightarrow{[4]+3\cdot[3]} \begin{pmatrix} 2 & 0 & -2 & 1 & 1 \\ 0 & 0 & 0 & 1 & -3 \\ 0 & -1 & -3 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & -1 & 6 & -1 \end{pmatrix} \xrightarrow{[1]-2\cdot[4]} \begin{pmatrix} 2 & 0 & 0 & -11 & 3 \\ 0 & 0 & 0 & 1 & -3 \\ 0 & -1 & -3 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & -1 & 6 & -1 \end{pmatrix}$$

$$\xrightarrow{[3]-3\cdot[4]} \begin{pmatrix} 2 & 0 & 0 & -11 & 3 \\ 0 & 0 & 0 & 1 & -3 \\ 0 & -1 & 0 & -17 & 3 \\ 0 & 0 & -1 & 6 & -1 \end{pmatrix} \xrightarrow{[1]+11\cdot[2]} \begin{pmatrix} 2 & 0 & 0 & 0 & -30 \\ 0 & 0 & 0 & 1 & -3 \\ 0 & -1 & 0 & -17 & 3 \\ 0 & 0 & -1 & 6 & -1 \end{pmatrix}$$

$$\xrightarrow{[3]+17\cdot[2]} \begin{pmatrix} 2 & 0 & 0 & 0 & -30 \\ 0 & 0 & 0 & 1 & -3 \\ 0 & -1 & 0 & 0 & -48 \\ 0 & 0 & -1 & 6 & -1 \end{pmatrix} \xrightarrow{[4]-6\cdot[2]} \begin{pmatrix} 2 & 0 & 0 & 0 & -30 \\ 0 & 0 & 0 & 1 & -3 \\ 0 & -1 & 0 & 0 & -48 \\ 0 & 0 & -1 & 0 & 17 \end{pmatrix}$$

したがって求める解は $\begin{pmatrix} w \\ x \\ y \\ z \end{pmatrix}=\begin{pmatrix} -15 \\ 48 \\ -17 \\ -3 \end{pmatrix}$.

(3) $\begin{cases} -w+x+y+z=-1 \\ w-x+y+z=4 \\ w+x-y+z=3 \\ w+x+y-z=4 \end{cases}$

[解]: この連立方程式の係数行列を A, 右辺の定数ベクトルを $\mathbf{b}$ とすると,

$$A = \begin{pmatrix} -1 & 1 & 1 & 1 \\ 1 & -1 & 1 & 1 \\ 1 & 1 & -1 & 1 \\ 1 & 1 & 1 & -1 \end{pmatrix}, \quad \mathbf{b} = \begin{pmatrix} -1 \\ 4 \\ 3 \\ 4 \end{pmatrix}$$

で, その拡大係数行列は

$$(A, \mathbf{b}) = \begin{pmatrix} -1 & 1 & 1 & 1 & -1 \\ 1 & -1 & 1 & 1 & 4 \\ 1 & 1 & -1 & 1 & 3 \\ 1 & 1 & 1 & -1 & 4 \end{pmatrix}$$

となる. 拡大係数行列 $(A, \mathbf{b})$ を行基本変形によって変形していくと,

$$\begin{pmatrix} -1 & 1 & 1 & 1 & -1 \\ 1 & -1 & 1 & 1 & 4 \\ 1 & 1 & -1 & 1 & 3 \\ 1 & 1 & 1 & -1 & 4 \end{pmatrix} \xrightarrow{[2]+1\cdot[1]} \begin{pmatrix} -1 & 1 & 1 & 1 & -1 \\ 0 & 0 & 2 & 2 & 3 \\ 1 & 1 & -1 & 1 & 3 \\ 1 & 1 & 1 & -1 & 4 \end{pmatrix}$$

$$\xrightarrow{[3]+1\cdot[1]} \begin{pmatrix} -1 & 1 & 1 & 1 & -1 \\ 0 & 0 & 2 & 2 & 3 \\ 0 & 2 & 0 & 2 & 2 \\ 1 & 1 & 1 & -1 & 4 \end{pmatrix} \xrightarrow{[4]+1\cdot[1]} \begin{pmatrix} -1 & 1 & 1 & 1 & -1 \\ 0 & 0 & 2 & 2 & 3 \\ 0 & 2 & 0 & 2 & 2 \\ 0 & 2 & 2 & 0 & 3 \end{pmatrix}$$

$$\xrightarrow{[4]-1\cdot[3]} \begin{pmatrix} -1 & 1 & 1 & 1 & -1 \\ 0 & 0 & 2 & 2 & 3 \\ 0 & 2 & 0 & 2 & 2 \\ 0 & 0 & 2 & -2 & 1 \end{pmatrix} \xrightarrow{\frac{1}{2}\cdot[3]} \begin{pmatrix} -1 & 1 & 1 & 1 & -1 \\ 0 & 0 & 2 & 2 & 3 \\ 0 & 1 & 0 & 1 & 1 \\ 0 & 0 & 2 & -2 & 1 \end{pmatrix}$$

$$\xrightarrow{[1]-1\cdot[3]} \begin{pmatrix} -1 & 0 & 1 & 0 & -2 \\ 0 & 0 & 2 & 2 & 3 \\ 0 & 1 & 0 & 1 & 1 \\ 0 & 0 & 2 & -2 & 1 \end{pmatrix} \xrightarrow{[2]+1\cdot[4]} \begin{pmatrix} -1 & 0 & 1 & 0 & -2 \\ 0 & 0 & 4 & 0 & 4 \\ 0 & 1 & 0 & 1 & 1 \\ 0 & 0 & 2 & -2 & 1 \end{pmatrix}$$

$$\xrightarrow{\frac{1}{4}\cdot[2]} \begin{pmatrix} -1 & 0 & 1 & 0 & -2 \\ 0 & 0 & 1 & 0 & 1 \\ 0 & 1 & 0 & 1 & 1 \\ 0 & 0 & 2 & -2 & 1 \end{pmatrix} \xrightarrow{[1]-1\cdot[2]} \begin{pmatrix} -1 & 0 & 0 & 0 & -3 \\ 0 & 0 & 1 & 0 & 1 \\ 0 & 1 & 0 & 1 & 1 \\ 0 & 0 & 2 & -2 & 1 \end{pmatrix}$$

$$\xrightarrow{[4]-2\cdot[2]} \begin{pmatrix} -1 & 0 & 0 & 0 & -3 \\ 0 & 0 & 1 & 0 & 1 \\ 0 & 1 & 0 & 1 & 1 \\ 0 & 0 & 0 & -2 & -1 \end{pmatrix} \xrightarrow{[3]+\frac{1}{2}\cdot[4]} \begin{pmatrix} -1 & 0 & 0 & 0 & -3 \\ 0 & 0 & 1 & 0 & 1 \\ 0 & 1 & 0 & 0 & \frac{1}{2} \\ 0 & 0 & 0 & -2 & -1 \end{pmatrix}$$

したがって求める解は $\begin{pmatrix} w \\ x \\ y \\ z \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 3 \\ \frac{1}{2} \\ 1 \\ \frac{1}{2} \end{pmatrix}$.