行列の基本変形と階段行列　演習問題２　解答例

問題 1. 次の行列が正則かどうか判定せよ．また，正則であればその逆行列を求めよ．

$$\text{(i)}\quad \begin{bmatrix} 2 & -5 \\ -1 & 3 \end{bmatrix} \qquad \text{(ii)}\quad \begin{bmatrix} 1 & 2 & 3 \\ 0 & 0 & 1 \\ -1 & -2 & 0 \end{bmatrix} \qquad \text{(iii)}\quad \begin{bmatrix} 1 & 0 & -1 & 1 \\ 2 & 1 & -2 & 8 \\ 3 & 1 & -3 & 10 \\ 1 & 0 & 0 & 2 \end{bmatrix}$$

解答. 以下，解答では第 i 行を r_i と表し，例えば第 i 行と第 j 行を入れ替える行基本変形を「$r_i \leftrightarrow r_j$」，第 i 行に第 j 行の c 倍を加える行基本変形を「$r_i + cr_j$」などと表すことにする．

(i)

$$\begin{bmatrix} 2 & -5 & 1 & 0 \\ -1 & 3 & 0 & 1 \end{bmatrix} \overset{r_1 \leftrightarrow r_2}{\longrightarrow} \begin{bmatrix} -1 & 3 & 0 & 1 \\ 2 & -5 & 1 & 0 \end{bmatrix} \overset{(-1)r_1}{\longrightarrow} \begin{bmatrix} 1 & -3 & 0 & -1 \\ 2 & -5 & 1 & 0 \end{bmatrix}$$
$$\overset{r_2+(-2)r_1}{\longrightarrow} \begin{bmatrix} 1 & -3 & 0 & -1 \\ 0 & 1 & 1 & 2 \end{bmatrix} \overset{r_1+3r_2}{\longrightarrow} \begin{bmatrix} 1 & 0 & 3 & 5 \\ 0 & 1 & 1 & 2 \end{bmatrix}$$

となるので，$\begin{bmatrix} 2 & -5 \\ -1 & 3 \end{bmatrix}$ は正則で $\begin{bmatrix} 2 & -5 \\ -1 & 3 \end{bmatrix}^{-1} = \begin{bmatrix} 3 & 5 \\ 1 & 2 \end{bmatrix}$ とわかる．

(ii)

$$\begin{bmatrix} 1 & 2 & 3 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & 0 & 1 & 0 \\ -1 & -2 & 0 & 0 & 0 & 1 \end{bmatrix} \overset{r_3+r_1}{\longrightarrow} \begin{bmatrix} 1 & 2 & 3 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 3 & 1 & 0 & 1 \end{bmatrix} \overset{\substack{r_1+(-3)r_2 \\ r_3+(-3)r_2}}{\longrightarrow} \begin{bmatrix} 1 & 2 & 0 & 1 & -3 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1 & -3 & 1 \end{bmatrix}$$

となるので，$\begin{bmatrix} 1 & 2 & 3 \\ 0 & 0 & 1 \\ -1 & -2 & 0 \end{bmatrix}$ は正則ではない．

(iii)

$$\begin{bmatrix} 1 & 0 & -1 & 1 & 1 & 0 & 0 & 0 \\ 2 & 1 & -2 & 8 & 0 & 1 & 0 & 0 \\ 3 & 1 & -3 & 10 & 0 & 0 & 1 & 0 \\ 1 & 0 & 0 & 2 & 0 & 0 & 0 & 1 \end{bmatrix} \overset{\substack{r_2+(-2)r_1 \\ r_3+(-3)r_1 \\ r_4+(-1)r_1}}{\longrightarrow} \begin{bmatrix} 1 & 0 & -1 & 1 & 1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 & 6 & -2 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 & 7 & -3 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & 1 & -1 & 0 & 0 & 1 \end{bmatrix}$$
$$\overset{r_3+(-1)r_2}{\longrightarrow} \begin{bmatrix} 1 & 0 & -1 & 1 & 1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 & 6 & -2 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1 & -1 & -1 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & 1 & -1 & 0 & 0 & 1 \end{bmatrix} \overset{r_3 \leftrightarrow r_4}{\longrightarrow} \begin{bmatrix} 1 & 0 & -1 & 1 & 1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 & 6 & -2 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & 1 & -1 & 0 & 0 & 1 \\ 0 & 0 & 0 & 1 & -1 & -1 & 1 & 0 \end{bmatrix}$$
$$\overset{r_1+r_3}{\longrightarrow} \begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 & 2 & 0 & 0 & 0 & 1 \\ 0 & 1 & 0 & 6 & -2 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & 1 & -1 & 0 & 0 & 1 \\ 0 & 0 & 0 & 1 & -1 & -1 & 1 & 0 \end{bmatrix} \overset{\substack{r_1+(-2)r_4 \\ r_2+(-6)r_4 \\ r_3+(-1)r_4}}{\longrightarrow} \begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 & 0 & 2 & 2 & -2 & 1 \\ 0 & 1 & 0 & 0 & 4 & 7 & -6 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & 0 & 0 & 1 & -1 & 1 \\ 0 & 0 & 0 & 1 & -1 & -1 & 1 & 0 \end{bmatrix}$$

となるので，$\begin{bmatrix} 1 & 0 & -1 & 1 \\ 2 & 1 & -2 & 8 \\ 3 & 1 & -3 & 10 \\ 1 & 0 & 0 & 2 \end{bmatrix}$ は正則で $\begin{bmatrix} 1 & 0 & -1 & 1 \\ 2 & 1 & -2 & 8 \\ 3 & 1 & -3 & 10 \\ 1 & 0 & 0 & 2 \end{bmatrix}^{-1} = \begin{bmatrix} 2 & 2 & -2 & 1 \\ 4 & 7 & -6 & 0 \\ 0 & 1 & -1 & 1 \\ -1 & -1 & 1 & 0 \end{bmatrix}$ とわかる．

補足　2つの定理を復習しておく．

定理 1. A を n 次正方行列とする．このとき，以下の 3 つは同値である．

(i) A は正則である．
(ii) $\operatorname{rank} A = n$.
(iii) A の階段行列は I_n である．

定理 2. A を n 次正方行列とし，A と n 次単位行列 I_n を並べた $n \times 2n$ 行列に対し，

$$[A, I_n] \to \cdots \to [B, P]$$

と左から n 列が階段行列となるよう行基本変形したとする（すなわち，B は A の階段行列）．このとき

(i) $B = I_n$ ならば，A は正則であり $P = A^{-1}$ が成立.
(ii) $B \neq I_n$ ならば，A は正則ではない.

以上の定理を用いて，階数によって正方行列が正則かどうか判定したり，行基本変形によって（正則であれば）逆行列を求めることができる．この他にも「行列式」によって正則性の判定や逆行列を求める方法がある（線形代数 I 演習問題 7 以降参照）.