基本変形と基本行列　演習問題２　解答例

この演習問題における行基本変形と基本行列とは，以下のもの[*1]とする．

定義 (行基本変形)**.** 行列に対して行う次の 3 つの操作を**行基本変形**という．

(R1) $c \neq 0$ なる $c \in \mathbb{R}$ を用いて，第 i 行を c 倍する（表記： cr_i）.
(R2) $c \in \mathbb{R}$ を用いて，第 i 行に第 j 行の c 倍を加える（表記： $r_i + cr_j$）.
(R3) 第 i 行と第 j 行を入れ替える（表記： $r_i \leftrightarrow r_j$）

行列 A にある行基本変形を行って行列 B が得られることを $A \to B$ と表す．もしくは行った行基本変形を明記して $A \overset{cr_i}{\to} B$ などと表すこともある．

定義 (基本行列)**.** 次の 3 種類の m 次正方行列を（m 次の）**基本行列**という．

- $c \neq 0$ なる $c \in \mathbb{R}$ を用いて，m 次単位行列 I_m の第 i 行を c 倍して得られる行列（表記: $P_i(c)$）.
- $c \in \mathbb{R}$ を用いて，m 次単位行列 I_m の第 i 行に第 j 行の c 倍を加えて得られる行列（表記: $P_{ij}(c)$）.
- m 次単位行列 I_m の第 i 行と第 j 行を入れ替えて得られる行列（表記: P_{ij}）

定義より，

$$I_m \overset{cr_i}{\to} P_i(c), \qquad I_m \overset{r_i+cr_j}{\to} P_{ij}(c), \qquad I_m \overset{r_i \leftrightarrow r_j}{\to} P_{ij}$$

が成り立つことに注意せよ．もっと一般に，行基本変形と基本行列の関係について次のことが示される．

定理 1. 行列 A に対して

$$\begin{aligned} A \xrightarrow{cr_i} B \quad &\Leftrightarrow \quad B = P_i(c)A \\ A \xrightarrow{r_i+cr_j} B \quad &\Leftrightarrow \quad B = P_{ij}(c)A \\ A \xrightarrow{r_i \leftrightarrow r_j} B \quad &\Leftrightarrow \quad B = P_{ij}A \end{aligned}$$

が成り立つ．すなわち行基本変形をすることは対応する基本行列を左から掛けることと等しく，基本行列を左から掛けることは対応する行基本変形を行うことと等しい．

以上を踏まえた上で以下の問に答えよ．

問題 1. 次の行列を具体的に答えよ．

(i) 2 次の $P_1(2)$.

解答. 定義より

$$P_1(2) = \begin{bmatrix} 2 & 0 \\ 0 & 1 \end{bmatrix}.$$

(ii) どんな 3 次正方行列 A に対しても，PA が A の第 1 行に第 3 行の (-1) 倍を加えた行列となる行列 P.

[*1] 「村上正康・佐藤恒雄・野澤宗平・稲葉尚志 共著，教養の線形代数，培風館」で用いられている表記を参考にした．

解答. P は 3 次の $P_{13}(-1)$ なので

$$P = \begin{bmatrix} 1 & 0 & -1 \\ 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{bmatrix}$$

(iii) 逆行列が 4 次の P_{34} であるような行列.

解答. 定義より

$$I_4 \overset{r_3 \leftrightarrow r_4}{\to} P_{34} \overset{r_3 \leftrightarrow r_4}{\to} I_4$$

が成り立つことがわかるが，2 番目の行基本変形を基本行列の言葉で言えば $P_{34}P_{34} = I_4$ である．したがって P_{34} は正則である．求める行列は P_{34}^{-1} なので

$$P_{34}^{-1} = P_{34} = \begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1 \\ 0 & 0 & 1 & 0 \end{bmatrix}.$$

注意 . 同様にして，基本行列はすべて正則であることがわかり，とくに

$$P_i(c)^{-1} = P_i(1/c), \qquad P_{ij}(c)^{-1} = P_{ij}(-c), \qquad P_{ij}^{-1} = P_{ij}$$

が成立することがわかる．よって基本行列の逆行列はまた基本行列となる．

問題 2. 次の行基本変形 $A \to B$ に対して，B を基本行列と A の積で表わせ（例えば

$$\begin{bmatrix} 1 & 2 \\ -2 & 3 \end{bmatrix} \to \begin{bmatrix} -1 & -2 \\ -2 & 3 \end{bmatrix}$$

に対しては，

$$\begin{bmatrix} -1 & -2 \\ -2 & 3 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} -1 & 0 \\ 0 & 1 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} 1 & 2 \\ -2 & 3 \end{bmatrix}$$

というように答えよ).

(i)

$$\begin{bmatrix} 2 & -2 \\ 3 & 1 \end{bmatrix} \to \begin{bmatrix} 2 & -2 \\ 5 & -1 \end{bmatrix}.$$

解答.

$$\begin{bmatrix} 2 & -2 \\ 3 & 1 \end{bmatrix} \overset{r_2 + 1 \cdot r_1}{\to} \begin{bmatrix} 2 & -2 \\ 5 & -1 \end{bmatrix}$$

だとわかるので

$$\begin{bmatrix} 2 & -2 \\ 5 & -1 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 1 & 0 \\ 1 & 1 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} 2 & -2 \\ 3 & 1 \end{bmatrix}.$$

(ii)

$$\begin{bmatrix} 3 & -1 & 0 \\ 2 & 0 & 1 \\ 1 & 2 & 5 \end{bmatrix} \to \begin{bmatrix} 3 & -1 & 0 \\ 1 & 2 & 5 \\ 2 & 0 & 1 \end{bmatrix}.$$

解答.

$$\begin{bmatrix} 3 & -1 & 0 \\ 2 & 0 & 1 \\ 1 & 2 & 5 \end{bmatrix} \overset{r_2 \leftrightarrow r_3}{\rightarrow} \begin{bmatrix} 3 & -1 & 0 \\ 1 & 2 & 5 \\ 2 & 0 & 1 \end{bmatrix}$$

だとわかるから

$$\begin{bmatrix} 3 & -1 & 0 \\ 1 & 2 & 5 \\ 2 & 0 & 1 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \\ 0 & 1 & 0 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} 3 & -1 & 0 \\ 2 & 0 & 1 \\ 1 & 2 & 5 \end{bmatrix}.$$

(iii)

$$\begin{bmatrix} 1 & 5 & -2 & 0 \\ 3 & 4 & 1 & 3 \\ -2 & 2 & 1 & 1 \\ 0 & -3 & 4 & -3 \end{bmatrix} \rightarrow \begin{bmatrix} 1 & -4 & 10 & -9 \\ 3 & 4 & 1 & 3 \\ -2 & 2 & 1 & 1 \\ 0 & -3 & 4 & -3 \end{bmatrix}.$$

解答.

$$\begin{bmatrix} 1 & 5 & -2 & 0 \\ 3 & 4 & 1 & 3 \\ -2 & 2 & 1 & 1 \\ 0 & -3 & 4 & -3 \end{bmatrix} \overset{r_1 + 3r_4}{\rightarrow} \begin{bmatrix} 1 & -4 & 10 & -9 \\ 3 & 4 & 1 & 3 \\ -2 & 2 & 1 & 1 \\ 0 & -3 & 4 & -3 \end{bmatrix}$$

であるから

$$\begin{bmatrix} 1 & -4 & 10 & -9 \\ 3 & 4 & 1 & 3 \\ -2 & 2 & 1 & 1 \\ 0 & -3 & 4 & -3 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 & 3 \\ 0 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} 1 & 5 & -2 & 0 \\ 3 & 4 & 1 & 3 \\ -2 & 2 & 1 & 1 \\ 0 & -3 & 4 & -3 \end{bmatrix}.$$

注意． A が $m \times n$ 行列のとき，ある行基本変形 R を行って

$$A \overset{R}{\rightarrow} B$$

となったとき，行基本変形 R に対応する基本行列，すなわち $B = PA$ をみたす基本行列 P は定理 1 より

$$I_m \overset{R}{\rightarrow} P$$

で求められる．すなわち，$A \overset{R}{\rightarrow} B$ に対して，m 次単位行列 I_m に同じ行基本変形を行って得られる基本行列を P とすると，$B = PA$ が成り立つ．