# §2 行列の和・積・転置　演習問題2　解答

📏 問題の難易度の目安【基礎】★☆☆　【標準】★★☆　【発展】★★★

$\boxed{1}$ (★☆☆)(**行列の可換性**)

(1) 次の行列が可換*かどうか調べよ．

(a) $A = \begin{pmatrix} 3 & -1 \\ -4 & 1 \end{pmatrix}$,　$B = \begin{pmatrix} 2 & -3 \\ -1 & 7 \end{pmatrix}$.

(b) $A = \begin{pmatrix} 1 & 4 \\ -3 & 2 \end{pmatrix}$,　$B = \begin{pmatrix} -11 & 12 \\ -9 & -8 \end{pmatrix}$.

(2) 行列 $A = \begin{pmatrix} 0 & 1 \\ 1 & 0 \end{pmatrix}$ と可換な行列をすべて求めよ．

$\boxed{2}$ (★☆☆)(**行列のべきの計算 1**)

行列 $A = \begin{pmatrix} -2 & -1 \\ 3 & 1 \end{pmatrix}$ について，次の問いに答えよ．ただし，$I$ は単位行列，$O$ は零行列とする．

(1) $A^2 + A + I = O$ を示せ．

(2) $A^3 = I$ を示せ．

(3) $A^{100}$ を求めよ．

$\boxed{3}$ (★★☆)(**行列のべきの計算 2**)

(1) 行列 $X = \begin{pmatrix} 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \\ 0 & 0 & 0 \end{pmatrix}$ のべきを求めよ．

(2) 2つの行列 $A$, $B$ が<u>可換なとき</u>，2項定理

$$(A+B)^n = {}_n\mathrm{C}_0 A^n + {}_n\mathrm{C}_1 A^{n-1}B + \cdots + {}_n\mathrm{C}_n B^n$$

および，(1) を用いて，行列 $Y = \begin{pmatrix} 1 & 1 & 0 \\ 0 & 1 & 1 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix}$ のべきを求めよ．

*2つの行列 $A$ と $B$ が可換とは $AB = BA$ のことをいう．

$\boxed{4}$ (★★★)(**行列のべきの計算 3**)

以下を証明せよ．

(1) 正方行列 $A, B$ がべき零行列かつ可換ならば，$AB,\ A+B$ もべき零行列であることを示せ．ここに，正方行列 $X$ がべき零であるとは，ある自然数 $k$ があって $X^k = O$ となることをいう．

(2) べき零行列 $A$ $(A^m = O)$ に対して，$A$ の指数関数を

$$\exp A := I + A + \frac{1}{2!}A^2 + \cdots + \frac{1}{(m-1)!}A^{m-1}$$

と定義する．$A, B$ がべき零かつ可換ならば指数法則

$$\exp(A+B) = \exp A \cdot \exp B$$

が成り立つことを示せ．

$\boxed{5}$ (★☆☆)(**行列の転置 1**)

行列 $A = \begin{pmatrix} 1 & 2 & -1 \\ 3 & 1 & 0 \end{pmatrix}$ に対して，転置行列 ${}^tA$ を求め，積 ${}^tAA$ および $A{}^tA$ を求めよ．

$\boxed{6}$ (★★☆)(**行列の転置 2; 対称行列・交代行列**)

$n$ 次正方行列 $A$ について，次の各問いに答えよ．

(1) $\dfrac{1}{2}(A + {}^tA)$ は対称行列であることを示せ．

(2) $\dfrac{1}{2}(A - {}^tA)$ は交代行列であることを示せ．

(3) $A$ は対称行列と交代行列の和で表されることを示せ．

(4) $A = \begin{pmatrix} 1 & 2 & 3 \\ 3 & 4 & 5 \\ 5 & 6 & 7 \end{pmatrix}$ を対称行列と交代行列の和で表せ．