行列の和・積・転置　問題 3　解答

$\boxed{1}$ 次の行列 A に対し, ${}^tA$ を A の転置行列とする. このとき積 $A{}^tA$ と ${}^tAA$ をそれぞれ求めよ.

(1) $A = \begin{pmatrix} a \\ b \\ c \end{pmatrix}$

[解]:

$$A{}^tA = \begin{pmatrix} a \\ b \\ c \end{pmatrix} \begin{pmatrix} a & b & c \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} a^2 & ab & ac \\ ab & b^2 & bc \\ ac & bc & c^2 \end{pmatrix},$$

$${}^tAA = \begin{pmatrix} a & b & c \end{pmatrix} \begin{pmatrix} a \\ b \\ c \end{pmatrix} = a^2 + b^2 + c^2.$$

(2) $A = \begin{pmatrix} a & b & c \end{pmatrix}$

[解]:

$$A{}^tA = \begin{pmatrix} a & b & c \end{pmatrix} \begin{pmatrix} a \\ b \\ c \end{pmatrix} = a^2 + b^2 + c^2,$$

$${}^tAA = \begin{pmatrix} a \\ b \\ c \end{pmatrix} \begin{pmatrix} a & b & c \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} a^2 & ab & ac \\ ab & b^2 & bc \\ ac & bc & c^2 \end{pmatrix}.$$

(3) $A = \begin{pmatrix} 1 & 2 & 3 \\ 3 & 1 & 2 \end{pmatrix}$

[解]:

$$A{}^tA = \begin{pmatrix} 1 & 2 & 3 \\ 3 & 1 & 2 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 1 & 3 \\ 2 & 1 \\ 3 & 2 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 14 & 11 \\ 11 & 14 \end{pmatrix},$$

$${}^tAA = \begin{pmatrix} 1 & 3 \\ 2 & 1 \\ 3 & 2 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 1 & 2 & 3 \\ 3 & 1 & 2 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 10 & 5 & 9 \\ 5 & 5 & 8 \\ 9 & 8 & 13 \end{pmatrix}.$$

(4) $A = \begin{pmatrix} 1 & x & x^2 \\ 1 & y & y^2 \\ 1 & z & z^2 \end{pmatrix}$

[解]:

$$
\begin{aligned}
A^tA &= \begin{pmatrix} 1 & x & x^2 \\ 1 & y & y^2 \\ 1 & z & z^2 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 1 & 1 & 1 \\ x & y & z \\ x^2 & y^2 & z^2 \end{pmatrix} \\
&= \begin{pmatrix} x^4+x^2+1 & x^2y^2+xy+1 & x^2z^2+xz+1 \\ x^2y^2+xy+1 & y^4+y^2+1 & y^2z^2+yz+1 \\ x^2z^2+xz+1 & y^2z^2+yz+1 & z^4+z^2+1 \end{pmatrix}, \\
{}^tAA &= \begin{pmatrix} 1 & 1 & 1 \\ x & y & z \\ x^2 & y^2 & z^2 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 1 & x & x^2 \\ 1 & y & y^2 \\ 1 & z & z^2 \end{pmatrix} \\
&= \begin{pmatrix} 3 & x+y+z & x^2+y^2+z^2 \\ x+y+z & x^2+y^2+z^2 & x^3+y^3+z^3 \\ x^2+y^2+z^2 & x^3+y^3+z^3 & x^4+y^4+z^4 \end{pmatrix}.
\end{aligned}
$$

$\boxed{2}$ 行列 A, B, C を

$$
A = \begin{pmatrix} 0 & -a & 0 & 0 \\ a & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & -a \\ 0 & 0 & a & 0 \end{pmatrix}, \quad B = \begin{pmatrix} 0 & 0 & -b & 0 \\ 0 & 0 & 0 & b \\ b & 0 & 0 & 0 \\ 0 & -b & 0 & 0 \end{pmatrix}, \quad C = \begin{pmatrix} 0 & 0 & 0 & c \\ 0 & 0 & c & 0 \\ 0 & -c & 0 & 0 \\ -c & 0 & 0 & 0 \end{pmatrix},
$$

とする.

(1) $AB - BA$ を求めよ.

[解]:

$$
\begin{aligned}
&AB - BA \\
&= \begin{pmatrix} 0 & -a & 0 & 0 \\ a & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & -a \\ 0 & 0 & a & 0 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 0 & 0 & -b & 0 \\ 0 & 0 & 0 & b \\ b & 0 & 0 & 0 \\ 0 & -b & 0 & 0 \end{pmatrix} - \begin{pmatrix} 0 & 0 & -b & 0 \\ 0 & 0 & 0 & b \\ b & 0 & 0 & 0 \\ 0 & -b & 0 & 0 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 0 & -a & 0 & 0 \\ a & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & -a \\ 0 & 0 & a & 0 \end{pmatrix} \\
&= \begin{pmatrix} 0 & 0 & 0 & -ab \\ 0 & 0 & -ab & 0 \\ 0 & ab & 0 & 0 \\ ab & 0 & 0 & 0 \end{pmatrix} - \begin{pmatrix} 0 & 0 & 0 & ab \\ 0 & 0 & ab & 0 \\ 0 & -ab & 0 & 0 \\ -ab & 0 & 0 & 0 \end{pmatrix} \\
&= \begin{pmatrix} 0 & 0 & 0 & -2ab \\ 0 & 0 & -2ab & 0 \\ 0 & 2ab & 0 & 0 \\ 2ab & 0 & 0 & 0 \end{pmatrix}.
\end{aligned}
$$

(2) ABC を求めよ.

[解]:

$$
\begin{aligned}
ABC &= \begin{pmatrix} 0 & -a & 0 & 0 \\ a & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & -a \\ 0 & 0 & a & 0 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 0 & 0 & -b & 0 \\ 0 & 0 & 0 & b \\ b & 0 & 0 & 0 \\ 0 & -b & 0 & 0 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 0 & 0 & 0 & c \\ 0 & 0 & c & 0 \\ 0 & -c & 0 & 0 \\ -c & 0 & 0 & 0 \end{pmatrix} \\
&= \begin{pmatrix} 0 & 0 & 0 & -ab \\ 0 & 0 & -ab & 0 \\ 0 & ab & 0 & 0 \\ ab & 0 & 0 & 0 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 0 & 0 & 0 & c \\ 0 & 0 & c & 0 \\ 0 & -c & 0 & 0 \\ -c & 0 & 0 & 0 \end{pmatrix} \\
&= \begin{pmatrix} abc & 0 & 0 & 0 \\ 0 & abc & 0 & 0 \\ 0 & 0 & abc & 0 \\ 0 & 0 & 0 & abc \end{pmatrix}.
\end{aligned}
$$

$\boxed{3}$ $A = \begin{pmatrix} 3 & -4 \\ 2 & -3 \end{pmatrix}$ とする.

(1) A^2, A^3 を求めよ.

[解]:

$$
\begin{aligned}
A^2 &= \begin{pmatrix} 3 & -4 \\ 2 & -3 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 3 & -4 \\ 2 & -3 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 1 \end{pmatrix}, \\
A^3 &= A^2 A = \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 1 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 3 & -4 \\ 2 & -3 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 3 & -4 \\ 2 & -3 \end{pmatrix}.
\end{aligned}
$$

(2) n を自然数として, A^n を求めよ.

[解]: $A^2 = I$ となることから, n が偶数, すなわち $n = 2k$ となるとき

$$A^n = A^{2k} = (A^2)^k = I^k = I.$$

n が奇数, すなわち $n = 2k+1$ となるとき

$$A^n = A^{2k+1} = (A^2)^k A = I^k A = A.$$

したがって,

$$A^n = \begin{cases} A & (n: \text{奇数}) \\ I & (n: \text{偶数}) \end{cases}$$

$\boxed{4}$ $A = \begin{pmatrix} a & 1 & 1 \\ 0 & a & 1 \\ 0 & 0 & a \end{pmatrix}$ とする.

(1) A^2, A^3 を求めよ.

[解]:

$$A^2 = \begin{pmatrix} a & 1 & 1 \\ 0 & a & 1 \\ 0 & 0 & a \end{pmatrix} \begin{pmatrix} a & 1 & 1 \\ 0 & a & 1 \\ 0 & 0 & a \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} a^2 & 2a & 2a+1 \\ 0 & a^2 & 2a \\ 0 & 0 & a^2 \end{pmatrix},$$

$$A^3 = A^2 A = \begin{pmatrix} a^2 & 2a & 2a+1 \\ 0 & a^2 & 2a \\ 0 & 0 & a^2 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} a & 1 & 1 \\ 0 & a & 1 \\ 0 & 0 & a \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} a^3 & 3a^2 & 3a^2+3a \\ 0 & a^3 & 3a^2 \\ 0 & 0 & a^3 \end{pmatrix}.$$

(2) n を自然数として, A^n を求めよ.

[解]: $n = 4, 5$ に対して

$$A^4 = \begin{pmatrix} a^4 & 4a^3 & 4a^3+6a^2 \\ 0 & a^4 & 4a^3 \\ 0 & 0 & a^4 \end{pmatrix}, A^5 = \begin{pmatrix} a^5 & 5a^4 & 5a^4+10a^3 \\ 0 & a^5 & 5a^4 \\ 0 & 0 & a^5 \end{pmatrix}$$

となる. このことから,

$$A^n = \begin{pmatrix} a^n & a^{n-1}n & \frac{a^{n-2}n(n-1)}{2} + a^{n-1}n \\ 0 & a^n & a^{n-1}n \\ 0 & 0 & a^n \end{pmatrix}$$

と予想される. この等式を n に関する帰納法により証明する. $n-1$ のときに成り立つと仮定すると,

$$A^n = AA^{n-1} = \begin{pmatrix} a & 1 & 1 \\ 0 & a & 1 \\ 0 & 0 & a \end{pmatrix} \begin{pmatrix} a^{n-1} & a^{n-2}(n-1) & \frac{a^{n-3}(n-2)(n-1)}{2} + a^{n-2}(n-1) \\ 0 & a^{n-1} & a^{n-2}(n-1) \\ 0 & 0 & a^{n-1} \end{pmatrix}$$

$$= \begin{pmatrix} a^n & a^{n-1}n & \frac{a^{n-2}n(2a+n-1)}{2} \\ 0 & a^n & a^{n-1}n \\ 0 & 0 & a^n \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} a^n & a^{n-1}n & \frac{a^{n-2}n(n-1)}{2} + a^{n-1}n \\ 0 & a^n & a^{n-1}n \\ 0 & 0 & a^n \end{pmatrix}.$$

したがって帰納法より A の n 乗は

$$A^n = \begin{pmatrix} a^n & a^{n-1}n & \frac{a^{n-2}n(n-1)}{2} + a^{n-1}n \\ 0 & a^n & a^{n-1}n \\ 0 & 0 & a^n \end{pmatrix}.$$

$\boxed{5}$ $A = \begin{pmatrix} 3 & 0 & -4 & 0 \\ 0 & 3 & 0 & -4 \\ 2 & 0 & -3 & 0 \\ 0 & 2 & 0 & -3 \end{pmatrix}$ とする.

(1) A^2, A^3 を求めよ.

[解]: 2×2 のブロック行列として A を分割すると,

$$
\begin{aligned}
A^2 &= \begin{pmatrix} 3 & 0 & -4 & 0 \\ 0 & 3 & 0 & -4 \\ 2 & 0 & -3 & 0 \\ 0 & 2 & 0 & -3 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 3 & 0 & -4 & 0 \\ 0 & 3 & 0 & -4 \\ 2 & 0 & -3 & 0 \\ 0 & 2 & 0 & -3 \end{pmatrix} \\
&= \begin{pmatrix} 3I & -4I \\ 2I & -3I \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 3I & -4I \\ 2I & -3I \end{pmatrix} \\
&= \begin{pmatrix} I^2 & 0 \\ 0 & I^2 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1 \end{pmatrix}, \\
A^3 = A^2 A &= \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 3 & 0 & -4 & 0 \\ 0 & 3 & 0 & -4 \\ 2 & 0 & -3 & 0 \\ 0 & 2 & 0 & -3 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 3 & 0 & -4 & 0 \\ 0 & 3 & 0 & -4 \\ 2 & 0 & -3 & 0 \\ 0 & 2 & 0 & -3 \end{pmatrix}.
\end{aligned}
$$

(2) n を自然数として, A^n を求めよ.

[解]: $\boxed{3}$ と同様に考えれば,

$$
A^n = \begin{cases} A & (n : \text{奇数}) \\ I & (n : \text{偶数}) \end{cases}
$$