§2 行列の和・積・転置　演習問題 2　解答

✐ 問題の難易度の目安【基礎】★☆☆　【標準】★★☆　【発展】★★★

1 (★☆☆)(行列の可換性)

(1) 次の行列が可換[a]かどうか調べよ．

(a) $A=\begin{pmatrix} 3 & -1 \\ -4 & 1 \end{pmatrix}$,　$B=\begin{pmatrix} 2 & -3 \\ -1 & 7 \end{pmatrix}$.

(b) $A=\begin{pmatrix} 1 & 4 \\ -3 & 2 \end{pmatrix}$,　$B=\begin{pmatrix} -11 & 12 \\ -9 & -8 \end{pmatrix}$.

(2) 行列 $A=\begin{pmatrix} 0 & 1 \\ 1 & 0 \end{pmatrix}$ と可換な行列をすべて求めよ．

[a] 2 つの行列 A と B が可換とは $AB=BA$ のことをいう．

解 (1)(a)　行列 $A=\begin{pmatrix} 3 & -1 \\ -4 & 1 \end{pmatrix}$, $B=\begin{pmatrix} 2 & -3 \\ -1 & 7 \end{pmatrix}$ について，

$$AB=\begin{pmatrix} 3 & -1 \\ -4 & 1 \end{pmatrix}\begin{pmatrix} 2 & -3 \\ -1 & 7 \end{pmatrix}=\begin{pmatrix} \mathbf{7} & \mathbf{-16} \\ \mathbf{-9} & \mathbf{19} \end{pmatrix},$$

$$BA=\begin{pmatrix} 2 & -3 \\ -1 & 7 \end{pmatrix}\begin{pmatrix} 3 & -1 \\ -4 & 1 \end{pmatrix}=\begin{pmatrix} \mathbf{18} & \mathbf{-5} \\ \mathbf{-31} & \mathbf{8} \end{pmatrix}.$$

(b)　(a)　行列 $A=\begin{pmatrix} 1 & 4 \\ -3 & 2 \end{pmatrix}$, $B=\begin{pmatrix} -11 & 12 \\ -9 & -8 \end{pmatrix}$ について，

$$AB=\begin{pmatrix} 1 & 4 \\ -3 & 2 \end{pmatrix}\begin{pmatrix} -11 & 12 \\ -9 & -8 \end{pmatrix}=\begin{pmatrix} -47 & -20 \\ 15 & -52 \end{pmatrix},$$

$$BA=\begin{pmatrix} -11 & 12 \\ -9 & -8 \end{pmatrix}\begin{pmatrix} 1 & 4 \\ -3 & 2 \end{pmatrix}=\begin{pmatrix} -47 & -20 \\ 15 & -52 \end{pmatrix}$$

ゆえ，$AB=BA$．したがって A と B は可換．

(2)　$X=\begin{pmatrix} x & y \\ z & w \end{pmatrix}$ とおく．A と X が可換であるとする．

$$AX=XA \iff \begin{pmatrix} 0 & 1 \\ 1 & 0 \end{pmatrix}\begin{pmatrix} x & y \\ z & w \end{pmatrix}=\begin{pmatrix} x & y \\ z & w \end{pmatrix}\begin{pmatrix} 0 & 1 \\ 1 & 0 \end{pmatrix}$$

$$\iff \begin{pmatrix} z & w \\ x & y \end{pmatrix}=\begin{pmatrix} y & x \\ w & z \end{pmatrix} \quad \cdots ①$$

となるような行列 X を決定したい．このとき①より $x=w$, $y=z$.

逆に $x=w$, $y=z$ ならば，$X=\begin{pmatrix} x & y \\ y & x \end{pmatrix}$ と書けて，

$$AX=\begin{pmatrix} 0 & 1 \\ 1 & 0 \end{pmatrix}\begin{pmatrix} x & y \\ y & x \end{pmatrix}=\begin{pmatrix} y & x \\ x & y \end{pmatrix},$$

$$XA=\begin{pmatrix} x & y \\ y & x \end{pmatrix}\begin{pmatrix} 0 & 1 \\ 1 & 0 \end{pmatrix}=\begin{pmatrix} y & x \\ x & y \end{pmatrix}$$

より確かに $AX=XA$ となる．以上より，A と可換な行列は $\boldsymbol{\begin{pmatrix} x & y \\ y & x \end{pmatrix}}$ **の形の行列のすべて.** ∎

$\boxed{2}$ (★☆☆)(行列のべきの計算 1)

行列 $A=\begin{pmatrix} -2 & -1 \\ 3 & 1 \end{pmatrix}$ について，次の問いに答えよ．ただし，I は単位行列，O は零行列とする．

(1) $A^2+A+I=O$ を示せ．

(2) $A^3=I$ を示せ．

(3) A^{100} を求めよ．

解 (1) 行列 $A=\begin{pmatrix} -2 & -1 \\ 3 & 1 \end{pmatrix}$ について，$A^2=\begin{pmatrix} 1 & 1 \\ -3 & -2 \end{pmatrix}$ ゆえ，

$$A^2+A+I=\begin{pmatrix} 1 & 1 \\ -3 & -2 \end{pmatrix}+\begin{pmatrix} -2 & -1 \\ 3 & 1 \end{pmatrix}+\begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 1 \end{pmatrix}=\begin{pmatrix} 0 & 0 \\ 0 & 0 \end{pmatrix}=O.$$

あるいは，次のように解いてもよい：

【別解】Cayley-Hamilton の定理より $A^2-(\mathrm{tr}\,A)A+(\det A)I=O\cdots$ⓐ が成り立つ．ここで，$\mathrm{tr}\,A=-2+1=-1$，$\det A=(-2)\cdot 1-(-1)\cdot 3=1$ であるから，これらⓐへ代入して，

$$A^2+A+I=O.$$

(2) $A^2+A+I=O$ の両辺に $A-I$ を左から掛けて，

$$\underbrace{(A-I)(A^2+A+I)}_{=A^3-I}=O \quad \therefore \quad A^3=I.$$

(3) $A^{100}=(A^3)^{33}\cdot A \overset{(2)}{=} I^{33}A=\boldsymbol{A}.$ ∎

3 (★★☆)(行列のべきの計算 2)

(1) 行列 $X = \begin{pmatrix} 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \\ 0 & 0 & 0 \end{pmatrix}$ のべきを求めよ．

(2) 2 つの行列 A, B が可換なとき，2 項定理

$$(A+B)^n = {}_n\mathrm{C}_0 A^n + {}_n\mathrm{C}_1 A^{n-1}B + \cdots + {}_n\mathrm{C}_n B^n$$

および，(1) を用いて，行列 $Y = \begin{pmatrix} 1 & 1 & 0 \\ 0 & 1 & 1 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix}$ のべきを求めよ．

解 (1) 行列 $X = \begin{pmatrix} 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \\ 0 & 0 & 0 \end{pmatrix}$ について，$X^2 = \begin{pmatrix} 0 & 0 & 1 \\ 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \end{pmatrix}$，$X^3 = \begin{pmatrix} 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \end{pmatrix}$．ゆえに $X^n = O \ (n \geqq 3)$．以上をまとめて，

$$\boldsymbol{X^n} = \begin{cases} \begin{pmatrix} \mathbf{0} & \mathbf{0} & \mathbf{0} \\ \mathbf{1} & \mathbf{0} & \mathbf{0} \\ \mathbf{0} & \mathbf{0} & \mathbf{0} \end{pmatrix} & \boldsymbol{(n=2)} \\ \boldsymbol{O} & \boldsymbol{(n \geqq 3)}. \end{cases}$$

(2) 行列 $Y = \begin{pmatrix} 1 & 1 & 0 \\ 0 & 1 & 1 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix}$ は X を用いて $Y = I + X$ と分解できる．このとき $X^n = O \ (n \geqq 3)$ に注意して，2 項定理を用いると，

$$\begin{aligned} Y^n = (I+X)^n &= {}_n\mathrm{C}_0 I^n + {}_n\mathrm{C}_1 I^{n-1}X + {}_n\mathrm{C}_2 I^{n-2}X^2 \\ &= I + nX + \frac{n(n-1)}{2}X^2 \\ &= \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix} + \begin{pmatrix} 0 & n & 0 \\ 0 & 0 & n \\ 0 & 0 & 0 \end{pmatrix} + \begin{pmatrix} 0 & 0 & \frac{n(n-1)}{2} \\ 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \end{pmatrix} \\ &= \begin{pmatrix} \mathbf{1} & \boldsymbol{n} & \boldsymbol{\frac{n(n-1)}{2}} \\ \mathbf{0} & \mathbf{1} & \boldsymbol{n} \\ \mathbf{0} & \mathbf{0} & \mathbf{0} \end{pmatrix}. \end{aligned}$$

■

4 (★★★)(行列のべきの計算 3)

以下を証明せよ．

(1) 正方行列 A, B がべき零行列かつ可換ならば，AB, $A+B$ もべき零行列であることを示せ．ここに，正方行列 X がべき零であるとは，ある自然数 k があって $X^k = O$ となることをいう．

(2) べき零行列 A $(A^m = O)$ に対して，A の指数関数を

$$\exp A := I + A + \frac{1}{2!}A^2 + \cdots + \frac{1}{(m-1)!}A^{m-1}$$

と定義する．A, B がべき零かつ可換ならば指数法則

$$\exp(A+B) = \exp A \cdot \exp B$$

が成り立つことを示せ．

解 (1) A, B が可換とすると，ある自然数 r, s が存在して $A^r = B^s = O$ が成り立つ．ここで $t := \min\{r, s\}$ とおく．A, B は可換でもあるから，$(AB)^t = A^tB^t = O$．したがって，AB はべき零である．次に，A, B が可換だから 2 項定理

$$(A+B)^n = {}_n\mathrm{C}_0A^n + {}_n\mathrm{C}_1A^{n-1}B + \cdots + {}_n\mathrm{C}_nB^n = \sum_{k=0}^{n} {}_n\mathrm{C}_kA^kB^{n-k} \quad \cdots ①$$

が成り立つ．ここで $n := r+s-1$ ととる．$k \geqq r$ ならば $A^k = O$．また，$k < r$ ならば

$$\begin{aligned} k < r &\iff n-k > n-r = s-1 \\ &\iff n-k \geqq s \end{aligned}$$

ゆえ，$B^{n-k} = O$ である．ゆえに，すべての $0 \leqq k \leqq n$ に対して $A^kB^{n-k} = O$ だから，①より $(A+B)^{r+s-1} = O$，すなわち $A+B$ もべき零である．

(2)

$$\begin{aligned} \exp A \cdot \exp B &= \left(\sum_{k=0}^{r-1} \frac{1}{k!}A^k\right)\left(\sum_{j=0}^{s-1} \frac{1}{j!}B^j\right) \\ &= \sum_{\ell=0}^{n-1} \frac{1}{\ell!}\left(\sum_{k+j=\ell} \frac{\ell!}{k!j!}A^kB^j\right), \qquad n = r+s-1. \end{aligned}$$

ここで，$0 \leqq k \leqq r-1$，$0 \leqq j \leqq s-1$ より $k \geqq r$ のとき $A^k = O$，$j \geqq s$ のとき $B^j = O$ であるので，これらの項も補うことにより

$$\begin{aligned} \exp A \cdot \exp B &= \sum_{\ell=0}^{n-1} \frac{1}{\ell!}\left(\sum_{k=0}^{\ell} \frac{\ell!}{k!(\ell-k)!}A^kB^{\ell-k}\right) \\ &= \sum_{\ell=0}^{n-1} \frac{1}{\ell!}(A+B)^\ell = \exp(A+B). \end{aligned}$$

∎

5 (★☆☆)(行列の転置 1)

行列 $A = \begin{pmatrix} 1 & 2 & -1 \\ 3 & 1 & 0 \end{pmatrix}$ に対して，転置行列 ${}^tA$ を求め，積 ${}^tAA$ および $A{}^tA$ を求めよ．

解 行列 $A = \begin{pmatrix} 1 & 2 & -1 \\ 3 & 1 & 0 \end{pmatrix}$ に対する転置行列は ${}^tA = \begin{pmatrix} \mathbf{1} & \mathbf{3} \\ \mathbf{2} & \mathbf{1} \\ \mathbf{-1} & \mathbf{0} \end{pmatrix}$．また，

$$ {}^tAA = \begin{pmatrix} 1 & 3 \\ 2 & 1 \\ -1 & 0 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 1 & 2 & -1 \\ 3 & 1 & 0 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} \mathbf{10} & \mathbf{5} & \mathbf{-1} \\ \mathbf{5} & \mathbf{5} & \mathbf{-2} \\ \mathbf{-1} & \mathbf{-2} & \mathbf{1} \end{pmatrix}, $$

$$ A{}^tA = \begin{pmatrix} 1 & 2 & -1 \\ 3 & 1 & 0 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 1 & 3 \\ 2 & 1 \\ -1 & 0 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} \mathbf{6} & \mathbf{5} \\ \mathbf{5} & \mathbf{10} \end{pmatrix}. $$

∎

6 (★★☆)(行列の転置 2; 対称行列・交代行列)

n 次正方行列 A について，次の各問いに答えよ．

(1) $\dfrac{1}{2}(A + {}^tA)$ は対称行列であることを示せ．

(2) $\dfrac{1}{2}(A - {}^tA)$ は交代行列であることを示せ．

(3) A は対称行列と交代行列の和で表されることを示せ．

(4) $A = \begin{pmatrix} 1 & 2 & 3 \\ 3 & 4 & 5 \\ 5 & 6 & 7 \end{pmatrix}$ を対称行列と交代行列の和で表せ．

解 以下，A は n 次正方行列とする．

(1) ${}^t\left(\dfrac{1}{2}(A + {}^tA)\right) = \dfrac{1}{2}({}^tA + {}^t({}^tA)) = \dfrac{1}{2}(A + {}^tA)$ ゆえ，$\dfrac{1}{2}(A + {}^tA)$ は対称行列．

(2) ${}^t\left(\dfrac{1}{2}(A - {}^tA)\right) = \dfrac{1}{2}({}^tA - {}^t({}^tA)) = -\dfrac{1}{2}(A - {}^tA)$ ゆえ，$\dfrac{1}{2}(A - {}^tA)$ は交代行列．

(3) 任意の正方行列 A は，(1),(2) を用いると，次のように表される：

$$ A = \frac{1}{2}(A + {}^tA) + \frac{1}{2}(A - {}^tA) = (\text{対称行列}) + (\text{交代行列}). $$

(4) $A = \begin{pmatrix} 1 & 2 & 3 \\ 3 & 4 & 5 \\ 5 & 6 & 7 \end{pmatrix}$ に対して，${}^tA = \begin{pmatrix} 1 & 3 & 5 \\ 2 & 4 & 6 \\ 3 & 5 & 7 \end{pmatrix}$ であるから，(1), (2) より

$$\frac{1}{2}\left(A + {}^tA\right) = \begin{pmatrix} 1 & 5/2 & 4 \\ 5/2 & 4 & 11/2 \\ 4 & 11/2 & 7 \end{pmatrix} \quad : \text{対称行列},$$

$$\frac{1}{2}\left(A - {}^tA\right) = \begin{pmatrix} 0 & -1/2 & -1 \\ 1/2 & 0 & -1/2 \\ 1 & 1/2 & 0 \end{pmatrix} \quad : \text{交代行列}.$$

したがって，(3) の証明の過程から

$$A = \begin{pmatrix} \mathbf{1} & \mathbf{5/2} & \mathbf{4} \\ \mathbf{5/2} & \mathbf{4} & \mathbf{11/2} \\ \mathbf{4} & \mathbf{11/2} & \mathbf{7} \end{pmatrix} + \begin{pmatrix} \mathbf{0} & \mathbf{-1/2} & \mathbf{-1} \\ \mathbf{1/2} & \mathbf{0} & \mathbf{-1/2} \\ \mathbf{1} & \mathbf{1/2} & \mathbf{0} \end{pmatrix}.$$

∎