§14 行列式の図形的意味　演習問題1

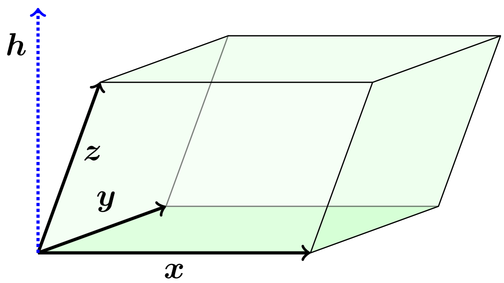
問題の難易度の目安【基礎】★☆☆　【標準】★★☆　【発展】★★★

1 (★★☆)(**平行四辺形の面積**)

$\mathbf{0}$ でなく互いに平行でない平面上の 2 本のベクトル $\boldsymbol{a} = \begin{pmatrix} a_1 \\ a_2 \end{pmatrix}$，$\boldsymbol{b} = \begin{pmatrix} b_1 \\ b_2 \end{pmatrix}$ のなす平行四辺形の面積 S は $S = \left|\det \begin{pmatrix} \boldsymbol{a} & \boldsymbol{b} \end{pmatrix}\right|$ で与えられることを示せ．

2 (★★★)(**平行 6 面体と行列式**)

空間内のベクトル $\boldsymbol{x}, \boldsymbol{y}, \boldsymbol{z}$ を $\boldsymbol{x} = \begin{pmatrix} x_1 \\ x_2 \\ x_3 \end{pmatrix}$, $\boldsymbol{y} = \begin{pmatrix} y_1 \\ y_2 \\ y_3 \end{pmatrix}$, $\boldsymbol{z} = \begin{pmatrix} z_1 \\ z_2 \\ z_3 \end{pmatrix}$ とおく．$\boldsymbol{x}$ と $\boldsymbol{y}$ の内積を $\boldsymbol{x} \cdot \boldsymbol{y} = x_1y_1 + x_2y_2 + z_3z_3$ で表し，$\boldsymbol{x}$ の大きさを $\|\boldsymbol{x}\| = \sqrt{\boldsymbol{x} \cdot \boldsymbol{x}} = \sqrt{x_1^2 + x_2^2 + x_3^2}$ で表す．以下，3 本のベクトル $\boldsymbol{x}, \boldsymbol{y}, \boldsymbol{z}$ で張られる下図のような平行六面体を考える．



(1) ベクトル $\boldsymbol{x}$ と $\boldsymbol{y}$ が張る底面の平行四辺形の面積 S は

$$S = \sqrt{\|\boldsymbol{x}\|^2\|\boldsymbol{y}\|^2 - (\boldsymbol{x} \cdot \boldsymbol{y})^2}$$

で与えられることを示せ．

(2) 行列 M を $M := \begin{pmatrix} \boldsymbol{z} & \boldsymbol{x} & \boldsymbol{y} \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} z_1 & x_1 & y_1 \\ z_2 & x_2 & y_2 \\ z_3 & x_3 & y_3 \end{pmatrix}$ で定義する．M を第 1 列目に関して余因子展開することで

$$\det M = z_1 \det \begin{pmatrix} x_2 & y_2 \\ x_3 & y_3 \end{pmatrix} - z_2 \det \begin{pmatrix} x_1 & y_1 \\ x_3 & y_3 \end{pmatrix} + z_3 \det \begin{pmatrix} x_1 & y_1 \\ x_2 & y_2 \end{pmatrix}$$

を示し，$\det M = \boldsymbol{z} \cdot \boldsymbol{h}$ となるベクトル $\boldsymbol{h}$ を求めよ．また求めた $\boldsymbol{h}$ に対して，$\boldsymbol{h} \cdot \boldsymbol{x} = 0$，$\boldsymbol{h} \cdot \boldsymbol{y} = 0$ であることを確かめよ．

(3) 行列式の性質 $\det A \det B = \det(AB)$ および $\det A = \det({}^tA)$ (${}^tA$：A の転置行列) を用いて，

$$(\boldsymbol{z} \cdot \boldsymbol{h})^2 = \det \begin{pmatrix} \|\boldsymbol{z}\|^2 & \boldsymbol{z} \cdot \boldsymbol{x} & \boldsymbol{z} \cdot \boldsymbol{y} \\ \boldsymbol{x} \cdot \boldsymbol{z} & \|\boldsymbol{x}\|^2 & \boldsymbol{x} \cdot \boldsymbol{y} \\ \boldsymbol{y} \cdot \boldsymbol{z} & \boldsymbol{y} \cdot \boldsymbol{x} & \|\boldsymbol{y}\|^2 \end{pmatrix}$$

が成り立つことを示せ．

(4) $\boldsymbol{h}$ の大きさ $\|\boldsymbol{h}\|$ は S に等しいことを示せ．

(5) 図の平行六面体の体積 V は次で与えられることを示せ：

$$V = |\boldsymbol{z} \cdot \boldsymbol{h}| = \sqrt{\det \begin{pmatrix} \|\boldsymbol{z}\|^2 & \boldsymbol{z} \cdot \boldsymbol{x} & \boldsymbol{z} \cdot \boldsymbol{y} \\ \boldsymbol{x} \cdot \boldsymbol{z} & \|\boldsymbol{x}\|^2 & \boldsymbol{x} \cdot \boldsymbol{y} \\ \boldsymbol{y} \cdot \boldsymbol{z} & \boldsymbol{y} \cdot \boldsymbol{x} & \|\boldsymbol{y}\|^2 \end{pmatrix}}.$$

$\boxed{\mathbf{3}}$ (★★★)(**4 面体の体積と行列式**)

空間内の 4 点 O$(0,0,0)$，A$(1,2,0)$，B$(-1,-1,1)$，C$(2,1,3)$ からなる四面体 OABC の体積を V とする．以下，$\boldsymbol{a} = \overrightarrow{\mathrm{OA}}$，$\boldsymbol{b} = \overrightarrow{\mathrm{OB}}$，$\boldsymbol{c} = \overrightarrow{\mathrm{OC}}$ と表す．

(1) $\boldsymbol{a}$ と $\boldsymbol{b}$ の両方に垂直なベクトルの 1 つを $\boldsymbol{h}$ と表す．$\boldsymbol{h}$ を求めよ．

(2) V は $\dfrac{1}{6}\det\begin{pmatrix}\boldsymbol{c} & \boldsymbol{a} & \boldsymbol{b}\end{pmatrix}$ に等しいことを確かめよ．